

ゲームの超限グランディ数

広島大学 川上滉太

2025.3.15

発表の流れ

①超限グランディ数の定義

②ゲームとその超限グランディ数の紹介

A.超限グランディ数が現れるバリエーション

B.1山で ω^k 以上のグランディ数が現れる例

ゲームのグランディ数

集合 $S \subsetneq \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し、 $\text{Mex}S = \min(\mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus S)$ (S に属さない最小の非負整数) として最小除外数Mexを定める。

このMexを用いて、以下のように再帰的に不偏ショートゲームの局面 m におけるグランディ数 $g(m)$ が定義される。

$$g(m) = \text{Mex}\{g(m') \mid m \rightarrow m'\}$$

グランディ数は定義より以下の性質を持つ。

- (1) 着手により必ず値が変化する
- (2) 元の局面のグランディ数より小さなグランディ数を指定された時、そのグランディ数を持つ局面に着手できる

本発表内で扱うゲームにおいては $\{g(m') \mid m \rightarrow m'\} = \mathbb{Z}_{\geq 0}$ となり得る(非short)ため、グランディ数を超限順序数で定義する。

超限グラнди数の導入 (Lex order)

$\mathbb{Z}_{\geq 0}^{k+1}$ 上の順序関係 $\leq_{lex}$ を

$$(n'_k, \dots, n'_1, n'_0) \leq_{lex} (n_k, \dots, n_1, n_0)$$

$$\iff (\forall i \in \{0, 1, \dots, k\}, n'_i = n_i)$$

または $(\exists i \in \{0, 1, \dots, k\}, n'_i < n_i \text{ かつ } \forall j > i, n'_j = n_j)$ (辞書式順序)

と定義する。

Lex order

この全順序 $\leq_{lex}$ を用いて $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{k+1}$ が整列順序集合となることが言える。

証明の概略：集合 $S \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^k (S \neq \emptyset)$ に対し、最小元の存在を示せばよい。

超限グラнди数の導入 (Lex order)

$(\mathbb{Z}_{\geq 0}^{k+1}, \leq_{lex})$ の整列性概略

$S_k := \{n_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid i < k \text{ に対し、 } n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ が存在し、 } (n_k, \dots, n_1, n_0) \in S\}$

$S_k \neq \emptyset$ であり、 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の整列性から S_k に最小元 m_k が存在。

以下同様に

$S_p := \{n_p \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid i < p \text{ に対し、 } \exists n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ s.t. } (m_k, \dots, m_{p+1}, n_p, \dots, n_1, n_0) \in S\}$

と定義すると、 $S_p \neq \emptyset$ であり、 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の整列性から S_p に最小元 m_p が存在。

以上の操作により、 $(m_k, m_{k-1}, \dots, m_1, m_0) \in S$ が得られ、
各 m_i の取り方からこれが S の最小元であることが成り立つ。

再掲

$(m_k, \dots, m_1, m_0)$ に対し、

$\omega^k \cdot m_k + \dots + \omega \cdot m_1 + m_0$ を Cantor Normal Form と呼ぶ。

超限グラнди数

ω は無限大(∞)に相当する

$$\Omega^{k+1} = \{\omega^k \cdot n_k + \cdots + \omega \cdot n_1 + n_0 | \forall i \in \{0, 1, \dots, k\}, n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

として ω^{k+1} 未満の順序数(Cantor Normal Form)の部分集合をとる。

Ω^k に対し、全順序 $\leq_{lex}$ を以下のように定義すると、
 Ω^k が整列集合であることが言える。

$$\begin{aligned} &\omega^{k-1} \cdot n'_{k-1} + \cdots + n'_0 \leq_{lex} \omega^{k-1} \cdot n_{k-1} + \cdots + n_0 \\ \iff &(\forall i \in \{0, 1, \dots, k-1\}, n_i = n'_i) \text{ または} \\ &(\exists i \in \{0, 1, \dots, k-1\}, n'_i < n_i \text{ かつ } \forall j > i \text{ に対し、} n'_j = n_j) \end{aligned}$$

(証明は先の結果と同様)

集合 $S \subsetneq \Omega^k$ に対し、 $\text{Mex}S = \min(\Omega^k \setminus S)$ として最小除外数Mexを定める。

適当なkを用いて

この順序数上のMexによって、以下のように再帰的にグラнди数 $g(m)$ を定める。
(順序数全体にすると任意の局面で定まることが知られている)[Abu2020]

$$g(m) = \text{Mex}\{g(m') | m \rightarrow m'\}$$

超限グランディ数とニム和

ニム和：非負整数をそれぞれ2進表記し、繰り上がり無しに足し合わせた値

$$\text{例：} 3 \oplus 2 \oplus 1 = 0$$

超限順序数にもニム和が拡張できる。

Ω^{k+1} 上のニム和は以下のように定義される。[Abu2020]

$$\begin{aligned} & (\omega^k \cdot n_k + \omega^{k-1} \cdot n_{k-1} + \dots + \omega \cdot n_1 + n_0) \oplus (\omega^k \cdot n'_k + \omega^{k-1} \cdot n'_{k-1} + \dots + \omega \cdot n'_1 + n'_0) \\ & := \omega^k (n_k \oplus n'_k) + \omega^{k-1} (n_{k-1} \oplus n'_{k-1}) + \dots + \omega (n_1 \oplus n'_1) + (n_0 \oplus n'_0) \end{aligned}$$

通常のグランディ数のときと同様に、超限グランディ数に対しても、複数のゲームが存在し、いずれかのゲームの局面に着手するゲーム（ゲームの和）について、後手必勝である必要十分条件は各ゲームの局面のグランディ数の総ニム和が0であることがいえる。

（ゲームはすべて正規形とする）

超限グランディ数とニム和

通常のグランディ数のときと同様に、超限グランディ数に対しても、複数のゲームが存在し、いずれかのゲームの局面に着手するゲーム（ゲームの和）について、後手必勝である必要十分条件は各ゲームの局面のグランディ数の総ニム和が0であることがいえる。

（ゲームはすべて正規形とする）

概略：

局面のグランディ数の総ニム和が0であるとき、どのゲームにどう着手してもグランディ数の総ニム和は0ではなくなる。

一方、局面のグランディ数の総ニム和が0でないならば、どれかのゲームに適切に着手することでグランディ数の総ニム和を0にできる。

また、終了局面はすべてのゲームでグランディ数が0なので総ニム和も0。

以上より必勝戦略はグランディ数の総ニム和を0にすることだといえる。 □

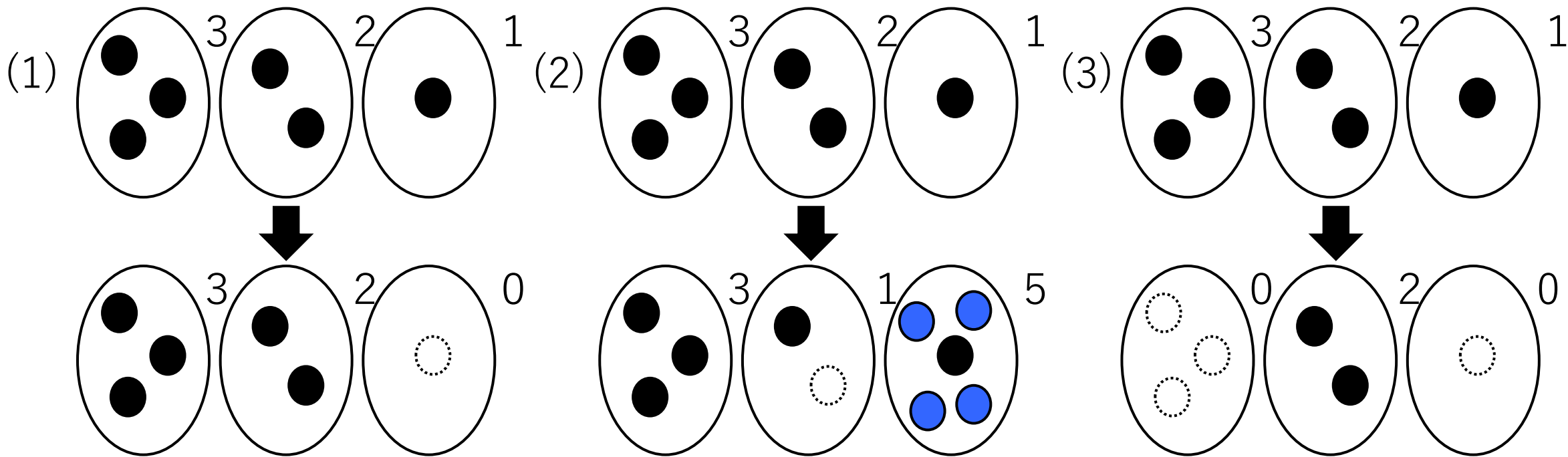
（通常のグランディ数に対する証明と流れは同じ）

超限グランディ数が現れる例の紹介

局面は k 個の石の山が横一列に並んだ状態、
着手は以下の条件を満たすもの としたゲーム

いずれかの山から石を1個以上取る。
石を取った山より右の山に対し、石の個数を自由に変化させてもよい。

着手の例($k=3$)



超限グラнди数が現れる例の紹介

再掲

$\mathbb{Z}_{\geq 0}^{k+1}$ 上の順序関係 $\leq_{lex}$ を

$$(n'_k, \dots, n'_1, n'_0) \leq_{lex} (n_k, \dots, n_1, n_0)$$

$$\iff (\forall i \in \{0, 1, \dots, k\}, n'_i = n_i)$$

$$\text{または } (\exists i \in \{0, 1, \dots, k\}, n'_i < n_i \text{ かつ } \forall j > i, n'_j = n_j)$$

有限性について

着手 $m \rightarrow m'$ は $m' <_{lex} m$ を満たし、
 $\leq_{lex}$ の整列性から無限降下列は存在しないため、
ゲームは必ず有限回で終了する。

超限グラнди数が現れる例の紹介

局面は $k + 1$ 個の石の山が横一列に並んだ状態、
着手は以下の条件を満たすもの としてゲームにおいて

いずれかの山から石を1個以上取る。

石を取った山より右の山に対し、石の個数を自由に変化させてもよい。

局面 $(m_k, m_{k-1}, \dots, m_1, m_0)$ における
グラディ数 $g(m_k, m_{k-1}, \dots, m_1, m_0)$ は

$$g(m_k, m_{k-1}, \dots, m_1, m_0) = \omega^k \cdot m_k + \dots + \omega \cdot m_1 + m_0$$

Example:

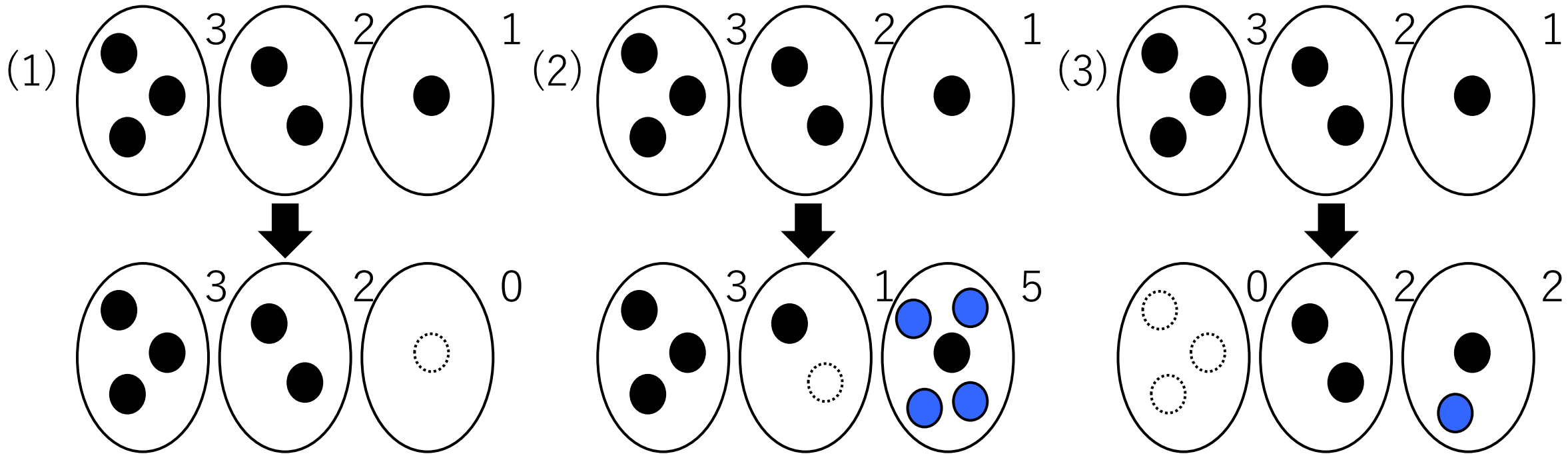
$$\begin{aligned} g(0, 1, 0) &= \text{Mex}\{0, 1, 2, \dots\} & g(1, 0, 0) &= \text{Mex}\{g(0, m'_1, m'_0) \mid m'_0, m'_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \\ &= \omega & &= \text{Mex}\{\omega \cdot m'_1 + m'_0 \mid m'_0, m'_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \\ & & &= \omega^2 \end{aligned}$$

ゲームAの紹介

局面は3つの石の山が横一列に並んだ状態、
着手は以下のいずれかを満たすもの としたゲームについて考える。

- (1) 右の山から石を1個以上取る
 - (2) 中央の山から石を1個以上取り、右の山に0個以上石を追加する
 - (3) 左の山から石を1個以上取り、ほかの山にそれぞれ0個以上石を追加する
- (例えば 10^{999} 個だろうと追加可能だが、石を減らしてはいけない)

着手の例



ゲームAの有限性

再掲

$\mathbb{Z}_{\geq 0}^{k+1}$ 上の順序関係 $\leq_{lex}$

$$(n'_k, \dots, n'_1, n'_0) \leq_{lex} (n_k, \dots, n_1, n_0)$$

$$\iff (\forall i \in \{0, 1, \dots, k\}, n'_i = n_i)$$

または $(\exists i \in \{0, 1, \dots, k\}, n'_i < n_i \text{ かつ } \forall j > i, n'_j = n_j)$ (辞書式順序)

$k=2$ として

着手 $m \rightarrow m'$ は $m' <_{lex} m$ を満たし、
 $\leq_{lex}$ の整列性から無限降下列は存在しないため、
ゲームは必ず有限回で終了する。

ゲームAのグランディ数

$n_2 = 0$ のとき (縦 : n_1 、横 : n_0)

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	ω	0	1	2	3	4
2	$\omega + 1$	ω	0	1	2	3
3	$\omega + 2$	$\omega + 1$	ω	0	1	2
4	$\omega + 3$	$\omega + 2$	$\omega + 1$	ω	0	1
5	$\omega + 4$	$\omega + 3$	$\omega + 2$	$\omega + 1$	ω	0

ゲームAのグランディ数

$n_2 = 1$ のとき (縦 : n_1 、横 : n_0)

	0	1	2	3	4	5
0	$\omega \cdot 2$	$\omega \cdot 2 + 1$	$\omega \cdot 2 + 2$	$\omega \cdot 2 + 3$	$\omega \cdot 2 + 4$	$\omega \cdot 2 + 5$
1	$\omega \cdot 3$	$\omega \cdot 2$	$\omega \cdot 2 + 1$	$\omega \cdot 2 + 2$	$\omega \cdot 2 + 3$	$\omega \cdot 2 + 4$
2	$\omega \cdot 3 + 1$	$\omega \cdot 3$	$\omega \cdot 2$	$\omega \cdot 2 + 1$	$\omega \cdot 2 + 2$	$\omega \cdot 2 + 3$
3	$\omega \cdot 3 + 2$	$\omega \cdot 3 + 1$	$\omega \cdot 3$	$\omega \cdot 2$	$\omega \cdot 2 + 1$	$\omega \cdot 2 + 2$
4	$\omega \cdot 3 + 3$	$\omega \cdot 3 + 2$	$\omega \cdot 3 + 1$	$\omega \cdot 3$	$\omega \cdot 2$	$\omega \cdot 2 + 1$
5	$\omega \cdot 3 + 4$	$\omega \cdot 3 + 3$	$\omega \cdot 3 + 2$	$\omega \cdot 3 + 1$	$\omega \cdot 3$	$\omega \cdot 2$

ゲームAのグランディ数

局面：3つの石の山が横一列に並んだ状態、

着手：以下のいずれかを満たす

(1) 右の山から石を1個以上取る

(2) 中央の山から石を1個以上取り、一番右の山に0個以上石を追加する

(3) 左の山から石を1個以上取り、ほかの山にそれぞれ0個以上石を追加する

定理

ゲームAについて局面 (n_2, n_1, n_0) のグランディ数 $g(n_2, n_1, n_0)$ は

$$a = \begin{cases} 0 & (n_1 \leq n_0) \\ 1 & (n_1 > n_0) \end{cases} \quad b = \begin{cases} n_0 - n_1 & (n_1 \leq n_0) \\ n_1 - n_0 - 1 & (n_1 > n_0) \end{cases}$$

として、 $g(n_2, n_1, n_0) = \omega(2n_2 + a) + b$ となる。

証明の指針

順序 $\leq_{lex}$ の帰納法により示す。

(n_2, n_1, n_0) を任意にとる。

帰納法の仮定から、任意の $(n'_2, n'_1, n'_0) <_{lex} (n_2, n_1, n_0)$ について定理の計算結果とグランディ数が一致する。

定理の証明には

1. $\alpha < g(n_2, n_1, n_0)$ に対し、着手 $(n_2, n_1, n_0) \rightarrow (n'_2, n'_1, n'_0)$ が存在し、
 $g(n'_2, n'_1, n'_0) = \alpha$
2. 任意の着手 $(n_2, n_1, n_0) \rightarrow (n'_2, n'_1, n'_0)$ に対し、 $g(n'_2, n'_1, n'_0) \neq g(n_2, n_1, n_0)$
を示せばよい。

証明の指針

例：局面(1,3,1) 定理での計算結果： $\omega \cdot 3 + 1$

(1,3,1)未満の局面と可能な着手

$n_2 = 0$ (縦： n_1 、横： n_0)

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	ω	0	1	2	3
2	$\omega + 1$	ω	0	1	2
3	$\omega + 2$	$\omega + 1$	ω	0	1
4	$\omega + 3$	$\omega + 2$	$\omega + 1$	ω	0
5	$\omega + 4$	$\omega + 3$	$\omega + 2$	$\omega + 1$	ω

$n_2 = 1$ (縦： n_1 、横： n_0)

	0	1	2	3	4
0	$\omega \cdot 2$	$\omega \cdot 2 + 1$	$\omega \cdot 2 + 2$	$\omega \cdot 2 + 3$	$\omega \cdot 2 + 4$
1	$\omega \cdot 3$	$\omega \cdot 2$	$\omega \cdot 2 + 1$	$\omega \cdot 2 + 2$	$\omega \cdot 2 + 3$
2	$\omega \cdot 3 + 1$	$\omega \cdot 3$	$\omega \cdot 2$	$\omega \cdot 2 + 1$	$\omega \cdot 2 + 2$
3	$\omega \cdot 3 + 2$	?			
4					
5					

$\omega \cdot 3 + 1$ 未満には着手可能、 $\omega \cdot 3 + 1$ には着手不可能 $\rightarrow g(1,3,1) = \omega \cdot 3 + 1$

ゲームBの紹介

局面：1個以上の石の山1つ、着手 $m \rightarrow m'$ は以下の条件を満たすこととする。

m, m' を素因数分解して $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}, m' = q_1^{b_1} q_2^{b_2} \dots q_s^{b_s}$

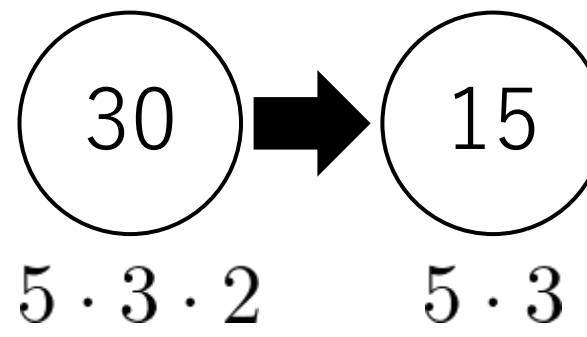
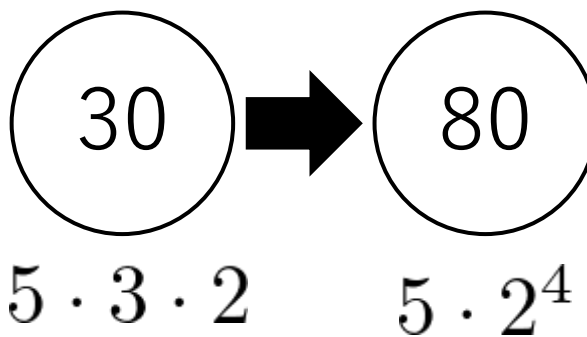
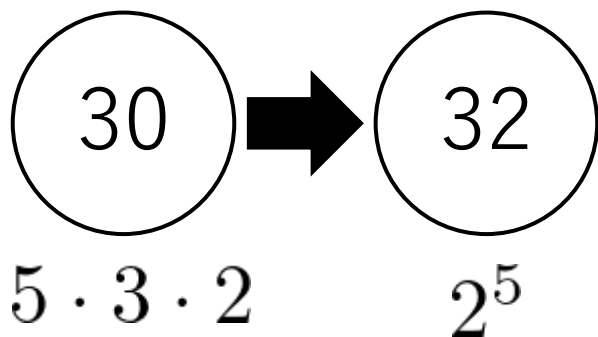
(ただし $p_1 > p_2 > \dots > p_r, q_1 > q_2 > \dots > q_s$ 、

任意の $i \in \mathbb{N}$ に対し $a_i, b_i \in \mathbb{N}$)としたとき、

ある $i \in \mathbb{N}$ が存在し、 $j < i$ に対し $p_j = q_j, a_j = b_j$ を満たし、
かつ次の(1)(2)のいずれかを満たす。

(1) $p_i > q_i$ (2) $p_i = q_i$ かつ $a_i > b_i$

可能な着手の例：



ゲームBのグランディ数

$$g(2^a) = a \quad \leftarrow \text{通常のニムと同様}$$

$$g(5^{a_2} \cdot 3^{a_1} \cdot 2^{a_0}) = \omega^2 \cdot a_2 + \omega \cdot a_1 + a_0$$

以下同様にr番目に小さな素数を p_r とすると

$$g(p_r^{a_r} \cdots 3^{a_1} \cdot 2^{a_0}) = \omega^{r-1} \cdot a_r + \cdots + \omega \cdot a_1 + a_0$$

証明は主題1と同様の指針で求まる

→任意の非負整数 k に対し、グランディ数が ω^k 以上の局面が存在する

参考文献

[Abu2020] 安福智明 ,Transfinite Version of Welter's Game, Journal of Mathematics, Tokushima University 54 , 83-91, 2020

ご清聴ありがとうございました

Ex：主題 1 のゲームのグランディ数（4山）

局面：4つの石の山が横一列に並んだ状態、
着手は以下を満たす

いずれかの山から石を取り、
石を取った山より右の山に対し、石をそれぞれ0個以上追加する。

予想

上記のゲームについて局面 (n_3, n_2, n_1, n_0) のグランディ数 $g(n_3, n_2, n_1, n_0)$ は

$$a_0 = \begin{cases} 0 & (n_1 \leq n_0) \\ 1 & (n_1 > n_0) \end{cases} \quad b_0 = \begin{cases} n_0 - n_1 & (n_1 \leq n_0) \\ n_1 - n_0 - 1 & (n_1 > n_0) \end{cases}$$

$$a_1 = \begin{cases} 0 & (n_3 \leq n_2) \\ 1 & (n_3 > n_2) \end{cases} \quad b_1 = \begin{cases} n_2 - n_3 & (n_3 \leq n_2) \\ n_3 - n_2 - 1 & (n_3 > n_2) \end{cases}$$

として、 $g(n_3, n_2, n_1, n_0) = \omega^2 \cdot a_1 + \omega(2b_1 + a_0) + b_0$ となる。

超限グラнди数の導入 (Lex order) (再掲)

$(\mathbb{Z}_{\geq 0}^{k+1}, \leq_{lex})$ の整列性概略

$S_k := \{n_k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid i < k \text{ に対し、} n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ が存在し、} (n_k, \dots, n_1, n_0) \in S\}$

$S_k \neq \emptyset$ であり、 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の整列性から S_k に最小元 m_k が存在。

以下同様に

$S_p := \{n_p \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid i < p \text{ に対し、} \exists n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ s.t. } (m_k, \dots, m_{p+1}, n_p, \dots, n_1, n_0) \in S\}$

と定義すると、 $S_p \neq \emptyset$ であり、 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の整列性から S_p に最小元 m_p が存在。

以上の操作により、 $(m_k, m_{k-1}, \dots, m_1, m_0)$ が得られ、
各 m_i の取り方からこれが S の最小元であることが成り立つ。

再掲

$(m_k, \dots, m_1, m_0)$ に対し、

$\omega^k \cdot m_k + \dots + \omega \cdot m_1 + m_0$ を Cantor Normal Form と呼ぶ。

Lex order の整列性 最小元である確認の詳細

$m = (m_k, \dots, m_1, m_0)$ とおく。

任意に $n = (n_k, \dots, n_1, n_0) \in S$ をとる。

m_k は S_k の最小元より $m_k \leq n_k$ が成り立つ。

$m_k < n_k$ ならば $m \leq_{lex} n$

$m_k = n_k$ のとき m_{k-1} は S_{k-1} の最小元より $m_{k-1} \leq n_{k-1}$ が成り立つ。

$m_{k-1} < n_{k-1}$ ならば $m \leq_{lex} n$

以下同様に $\exists p s.t. \forall i > p, m_i = n_i$ かつ $m_p \neq n_p$ が成り立つとき、
 $m_p < n_p$ となるので、 $m \leq_{lex} n$ が成り立つ。

$\forall i \in \{0, 1, \dots, k\}, m_i = n_i$ のときも $m \leq_{lex} n$ が成り立つので、
 m は S の最小元となる。

超限グランディ数とニム和 詳細

$g_1(m_1) \oplus \dots \oplus g_k(m_k) = 0$ が成り立つとき

$m_i \rightarrow m'_i$ とすると $g_i(m_i) \neq g_i(m'_i)$

$g_i(m_i) = \omega^s \cdot n_{i,s} + \dots + \omega^1 \cdot n_{i,1} + n_{i,0}$ 、

$g_i(m'_i) = \omega^s \cdot n'_{i,s} + \dots + \omega^1 \cdot n'_{i,1} + n'_{i,0}$ とすると、

$t \in \{0, 1, \dots, s\}$ が存在し、 $n_{i,t} \neq n'_{i,t}$ が成り立つ。

$n_{1,t} \oplus \dots \oplus n_{i-1,t} \oplus n'_{i,t} \oplus n_{i+1,t} \oplus \dots \oplus n_{k,t} \neq 0$ となるので $g(m') \neq 0$

$g_1(m_1) \oplus \dots \oplus g_k(m_k) \neq 0$ のとき

$g_1(m_1) \oplus \dots \oplus g_k(m_k) = \omega^p \cdot a_p + \dots + \omega \cdot a_1 + a_0 (a_p \neq 0)$ とする。

$g_i(m_i) = \omega^s \cdot a_{s,i} + \dots + \omega \cdot a_{1,i} + a_{0,i}$ とおくと、

いずれかの $a_{p,i}$ を減らして $a'_{p,i}$ とすることでその桁の総ニム和を0にできる。

それより下位の桁についても $a_{q,i}$ を $a'_{q,i}$ と変えることで総ニム和を0にできる。

変化後はより小さな値となっているため、実際にそのグランディ数を持つ局面に着手でき、その着手によりグランディ数を0にできる。