

# A Very Short History of Ending Partizan Games

木村俊一

2025年3月15日 広島大学

after 井上博裕



# 目次

1. Ending Partizan の誕生
2. 最初の例と謎の現象
3. 井上-門脇の定理
4. P-position の偏りと Carret の定理
5. Nowakowski の正規化
6. Ending Partizan Quotient と Unifying Theorem
7. Future Work



# 1. Ending Partizan の誕生



# 組合せゲームの定義

$M$  は、ゲームの局面全体がなす集合とする。

$2^M$  は  $M$  の部分集合全体がなす集合とする。

左手 ( $L$  と略す。Louise と呼ばれる。青色。) と

右手 ( $R$  と略す。Richard と呼ばれる。赤色。) が戦うゲームとは、

着手写像

$$\begin{cases} f_L : M \rightarrow 2^M \\ f_R : M \rightarrow 2^M \end{cases}$$

および

勝敗決定写像

$$\begin{cases} \varphi_L : \{m \in M \mid f_L(m) = \emptyset\} \rightarrow \{W, L\} \\ \varphi_R : \{m \in M \mid f_R(m) = \emptyset\} \rightarrow \{W, L\} \end{cases}$$

という 4 つの写像の組で、



$m' \in f_L(m) \cup f_R(m)$  のとき  $m \rightarrow m'$  と略記することにして、

$$m_0 \rightarrow m_1 \rightarrow m_2 \rightarrow m_3 \rightarrow \cdots$$

という無限列が存在しないもの（つまり有限性の条件を満たすもの）とする。

$f_L$  は、局面  $m$  から Louise が着手して  
どういう局面にできるかを列挙したもの、

$f_R$  は、局面  $m$  から Richard が着手して  
どういう局面にできるかを列挙したもの。

$\varphi_L$ 、 $\varphi_R$  は、そこで着手できなくなった  
手番のプレイヤーが勝ち (W) か  
負け (L)かを定める写像。



$\varphi L$  および  $\varphi R$  がともに 負け (L) への

定数写像とするルールを正規形、

(つまり、正規形では

最後に着手できなくなったプレイヤーが負け)

---

$\varphi L$  および  $\varphi R$  がともに 勝ち (W) への

定数写像とするルールを逆形とよぶ。

(つまり、逆形では

最後に着手できなくなったプレイヤーが勝ち)



井上博裕くんがセミナーで使っていた教科書

Second Edition

# LESSONS IN PLAY

An Introduction to Combinatorial Game Theory



Michael H. Albert · Richard J. Nowakowski · David Wolfe

CRC Press  
Taylor & Francis Group  
AN AK PETERS BOOK

では、不偏ゲーム

(Impartial Game) が

「 $f_L = f_R$  を満たすゲーム」

と定義されていた。

例えば、将棋やチェスは

不偏ゲームではない。

典型的な不偏ゲームは

石とりゲーム。



しかし、セミナーでは

「勝敗決定写像も

$$\varphi_L = \varphi_R$$

を満たさないと、不偏とは言えないのでは？」

という指摘が出た。

たいていのゲームは、正規形あるいは逆形を

仮定するので、上の等式は成り立ってしまうが



教科書では

「不偏ゲームだと、全ての局面が  
先手必勝（つまり先手に必勝戦略がある）か、  
あるいは  
後手必勝（つまり後手に必勝戦略がある）か、  
どちらか一方、そして一方のみが成り立つ。」

と定理が述べられて証明されていたが

$$\varphi_L = \varphi_R$$

でないと、その証明は成り立たない。



その翌週、井上博裕くんが

$$f_L = f_R$$

は満たすけれども

$$\varphi_L = \varphi_R$$

は満たさないゲームの例を見つけてきて

セミナーで報告してくれた。

両プレイヤーの着手は同じだが

勝敗判定が同じ基準ではない、

Ending Partizan Game

の誕生である。(2024年6月)



## 2. 最初の例と謎の現象

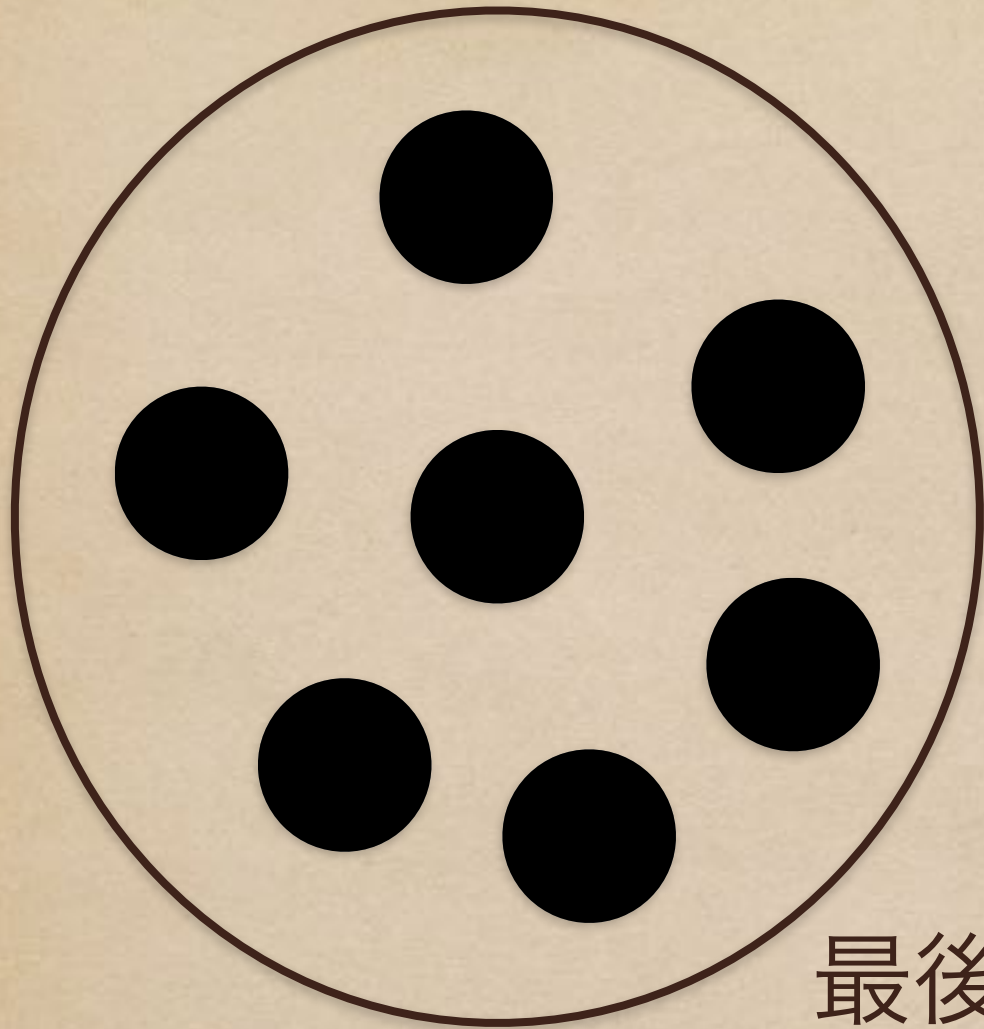


山にいくつか石があり、

Louise と Richard が

交互に 2 個、または 3 個

石を取る。



最後に、石が 1 個以下になったら

それ以上石が取れない。

$S = \{2, 3\}$

除去可能数集合

残った石が 0 個なら、Louise の勝ち

残った石が 1 個なら、Richard の勝ち

より一般に、残った石の偶奇で L と R にふりわけられる。



最初石の個数が6個のときの

ゲームの進行例。（両プレイヤーとも

最善をつくしてみる）

Louise が先手のとき

$6 \xrightarrow{L} 4 \xrightarrow{R} 1$  となり、Richard の勝ち。

Richard が先手のとき

$6 \xrightarrow{R} 4 \xrightarrow{L} 2 \xrightarrow{R} 0$  となり、Louise の勝ち。

石が6個の場合は、後手必勝となる。



さて、このゲーム、一般に Louise と Richard の

どちらが有利だろうか？

終了局面（もう石が取れない局面）は

0個と1個の2通りであり、

それぞれを平等に Louise と Richard に

割り当てているので、

有利不利はなさそうに見える。



不偏ゲームだと、どの局面も  
先手必勝か、後手必勝か、どちらか一方であったが

Ending Partizan NIM では

その他に「**左手**必勝」「**右手**必勝」があらわれる。

**左手**必勝とは、どちらが先手であろうと

**左手**に必勝戦略がある局面、

**右手**必勝とは、どちらが先手であろうと

**右手**に必勝戦略がある局面。



後手必勝の局面：P (Previous Player)

先手必勝の局面：N (Next Player)

左手必勝の局面：L (Left)

右手必勝の局面：R (Right)

というように頭文字をとって

P, N, L, Rの4通りに分類する。

これらを、局面の帰結類 (Outcome) と呼ぶ。



$S=\{2, 3\}$ 、つまり 2 個または 3 個

石が取れる 1 山石取りゲームで

それぞれの石の個数  $n$  での帰結類を計算してみる。

$n=0$  ルールにより、Louise の勝ち。 **L**

$n=1$  ルールにより、Richard の勝ち。 **R**

$n=2$  どちらが先手でも、2 個石を取るしかない。 **L**

$n=3$  L は 3 個、R は 2 個石を取って勝てる。 **N**

$n=4$  L は 2 個、R は 3 個石を取って勝てる。 **N**

$n=5$  L は先手なら 3 個石を取れば勝ち。

後手なら、相手と合わせて 5 個石を取れば良い。 **L**

$n=6$  2 個石をとっても 3 個石をとっても

相手が勝てる N 局面になってしまう。 **P**



古典的な石取りゲームの場合、

終了局面を除いて、

うまく着手して後手必勝の局面にできれば先手必勝、

どう着手しても先手必勝の局面になるなら後手必勝

という、簡明な判定法があった。

一般の 非不偏ゲームでも

ちょっとややこしいけど、同様の判定法がある。

$$f_L = f_R$$

を仮定すると、案外簡単な判定法になる。



$f_L = f_R$  と仮定するとき、終了局面以外では

(1) どう着手しても  $N$  になってしまうならば、 $P$

(2) (1)以外で、どう着手しても  $N$  または  $L$  になってしまうならば、 $L$

(3) (1) 以外で、どう着手しても  $N$  または  $R$  になってしまうならば、 $R$

(4) それ以外は全て  $N$

(4) になる条件は、着手先に  $P$  が一つでもあるか、あるいは着手先に  $L$  も  $R$  も両方ともあるか、少なくともどちらか一方が成り立つこと。



除去可能数集合が  $S$ 、石の個数が  $n$  個のときの  
帰結類  $\in \{P, N, L, R\}$  を  $o_S(n)$  とあらわすと

$S=\{2, 3\}$  のときの帰結類は

| $n$      | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| $o_S(n)$ | L | R | L | N | N | L | P | L | N | N | L  | P  | L  |



LNNLP というパターンが 2 度続いた。

$n$  での帰結類は、 $n-2$  および  $n-3$  の帰結類で決まるので

以下、周期 5 で同じパターンを繰り返す。

なぜか L に有利に見える！



$S=\{2, 3, 6\}$  の場合に、同様に帰結類の表を作っていくと

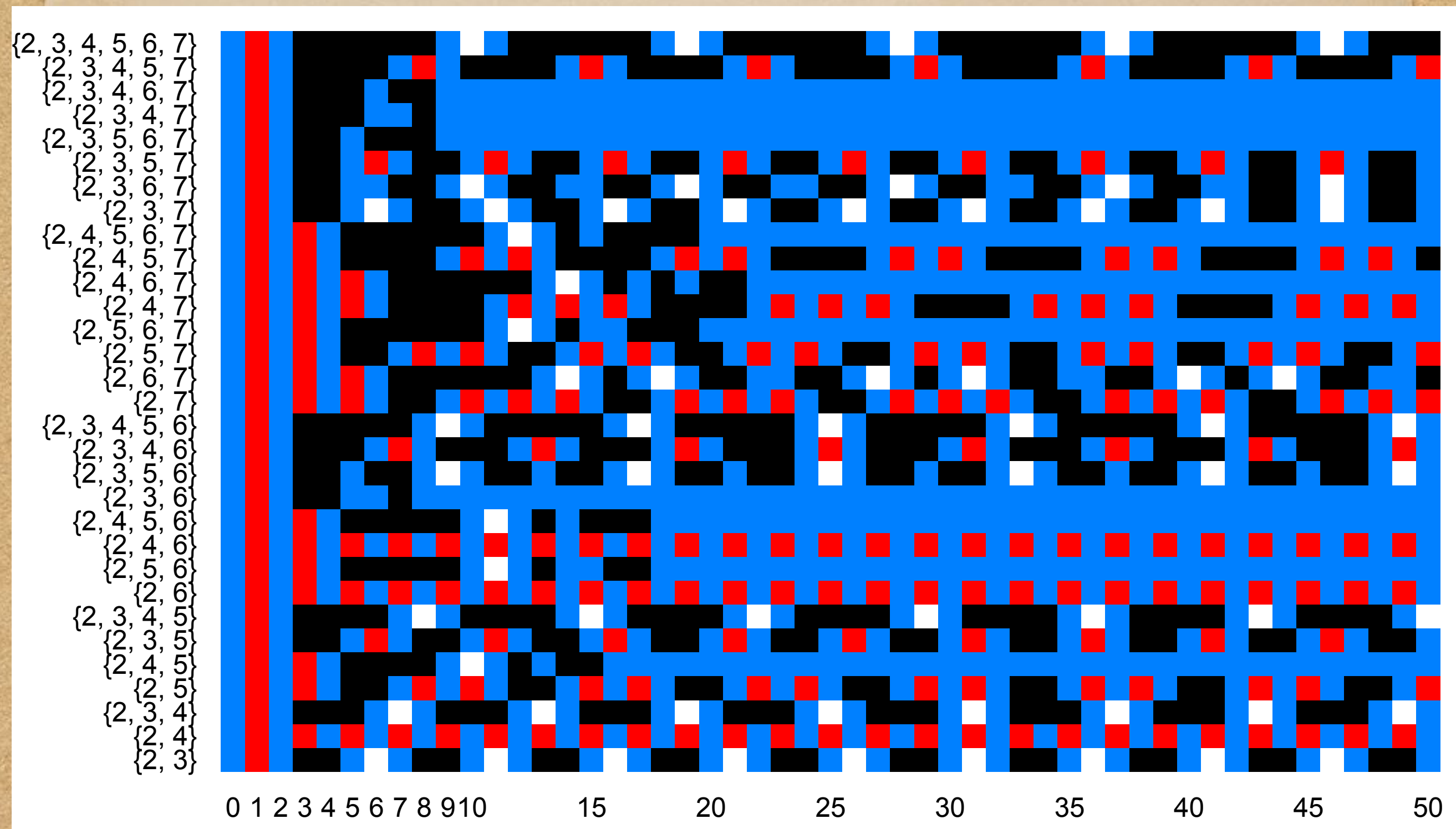
| n        | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| $o_S(n)$ | L | R | L | N | N | L | L | N | L | L | L  | L  | L  |

石の数が8個以上ならいつでも **L** になる！

さらに **Louise** が有利！



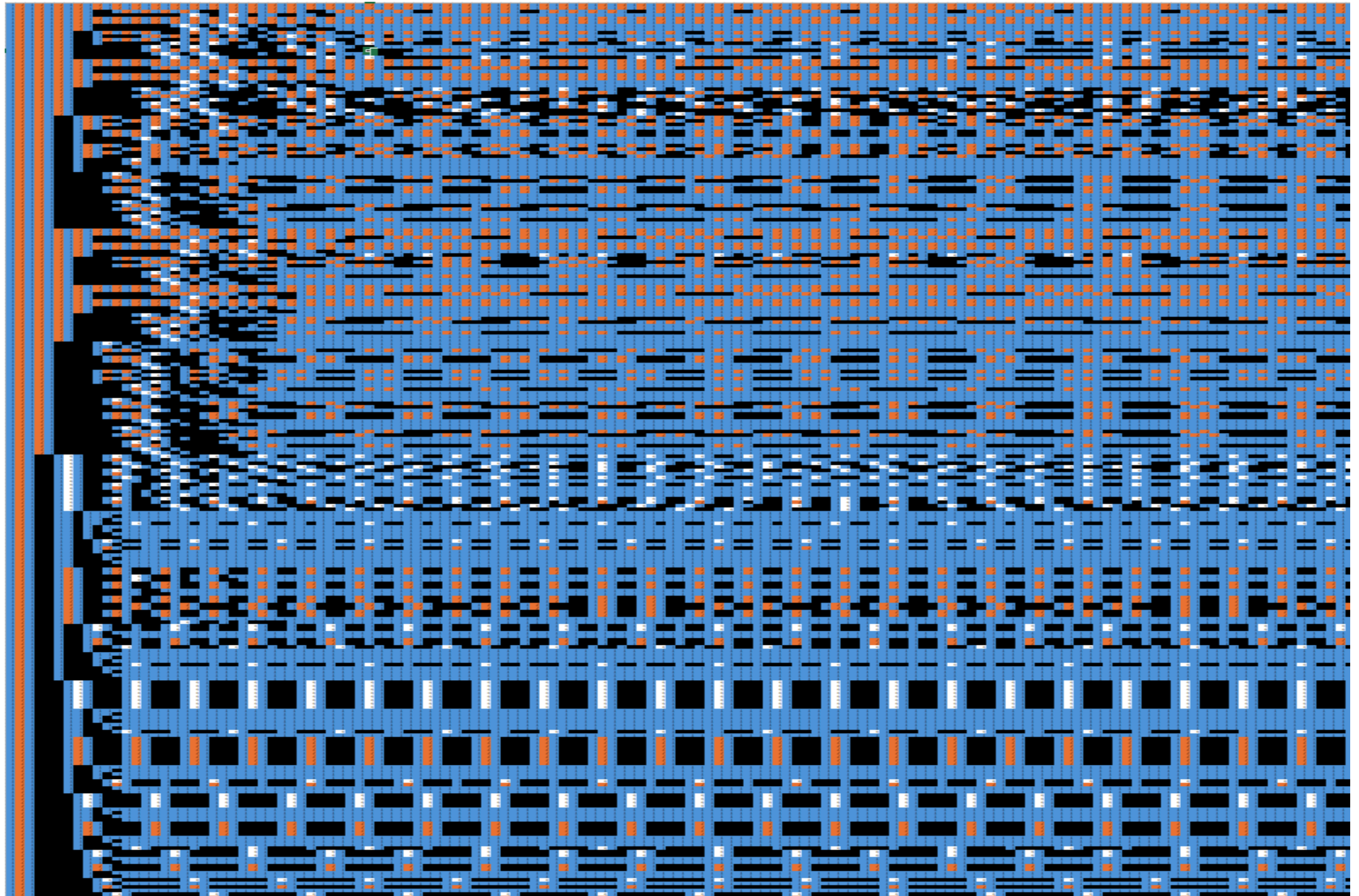
Sとして、2を含み、2元以上、最大7以下を全て走らせ  
Lは青、Rは赤、Nは黒、Pは白で塗り分けてみた



青が目立つ！

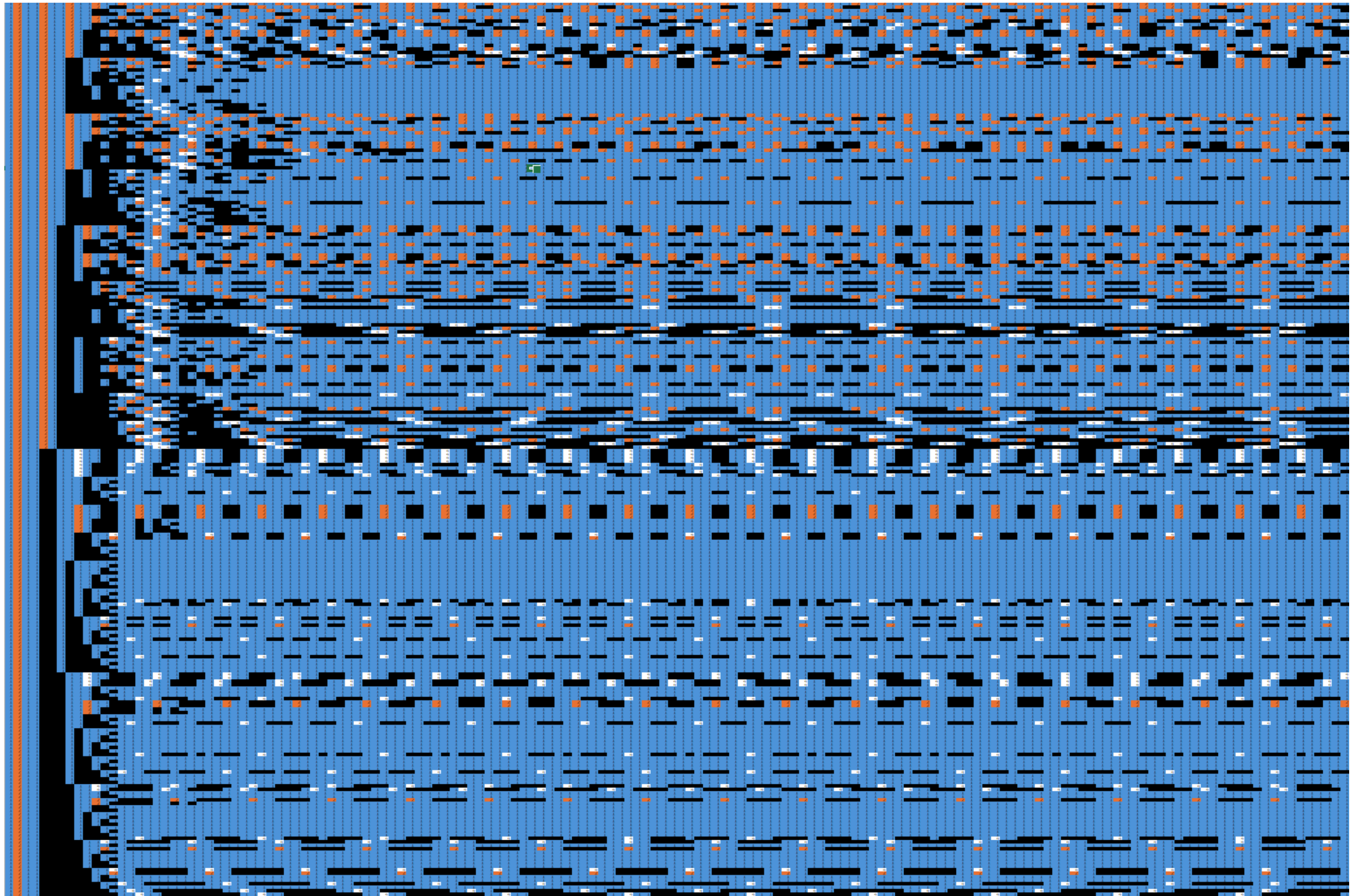


2を含み、最大20以下の262144個のSのうち  
200992個、実に76.7%のSで、  
ある番号から先が全てLになった。





最低が3、最大が21以下のS全て走らせると  
93.1%のSに対して、ある番号から先が全てLになった。





### 3. 井上~門脇の定理



問題：平等なルール設定に見えるのに、  
なぜ  $L$  の方が  $R$  より圧倒的に有利なのか？

定理（井上～門脇）

有限集合  $S \subset \{2, 3, 4, 5, 6, \dots\} = \mathbb{Z}_{\geq 2}$  を固定し  
最後に残った石の個数が偶数個なら  $L$  の勝ち  
奇数個なら  $R$  の勝ち、という Ending Partizan NIM  
を考える。

(1)  $\mathcal{O}_S(n) = R$  ならば、 $\mathcal{O}_S(n \pm 1) = L$  である。

(2)  $\mathcal{O}_S(n) = \mathcal{P}$  ならば、 $\mathcal{O}_S(n \pm 1) \in \{\mathcal{P}, L\}$  である。

(3)  $\mathcal{O}_S(n) = \mathcal{N}$  ならば、 $\mathcal{O}_S(n \pm 1) \in \{\mathcal{N}, L\}$  である。

一方、 $L$  の左右には全ての帰結類があらわれうる。



(1) は言い換えると、**R** があらわれたら、その左右は必ず **L**

|          |     |          |          |          |
|----------|-----|----------|----------|----------|
| n        | ... | n-1      | n        | n+1      |
| $o_S(n)$ | ... | <b>L</b> | <b>R</b> | <b>L</b> |

P があらわれたら、いくつか P が続き、  
その左右は **L** で、はさまれる。

|          |     |          |   |     |     |       |          |
|----------|-----|----------|---|-----|-----|-------|----------|
| n        | ... | n-1      | n | n+1 | ... | n+s-2 | n+s-1    |
| $o_S(n)$ | ... | <b>L</b> | P | P   | ... | P     | <b>L</b> |

より詳しく、S の最小元が s なら、P は高々 s-1 個しか続かない。

N があらわれたら、いくつか N が続き、  
その左右は **L** で、はさまれる。

|          |     |          |   |     |     |       |          |
|----------|-----|----------|---|-----|-----|-------|----------|
| n        | ... | n-1      | n | n+1 | ... | n+t-2 | n+t-1    |
| $o_S(n)$ | ... | <b>L</b> | N | N   | ... | N     | <b>L</b> |

S の最大元が t なら、N は高々 t-1 個しか続かない。



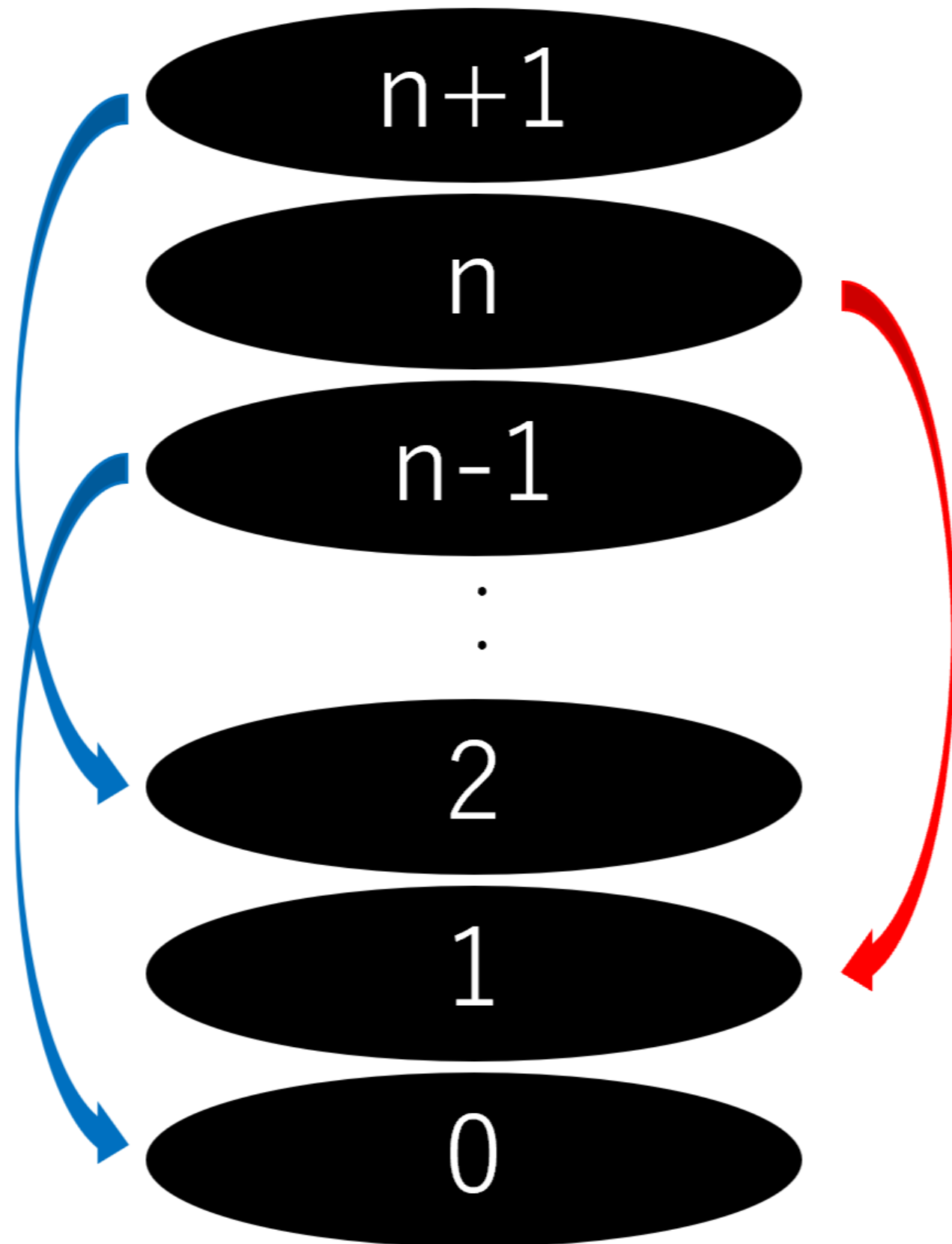
証明のアイデア：

例えば、 $S$  が 2 を含むとしよう。

$n$  の帰結類が  $R$  であるとは、 $R$  は  $n$  から始めて最後に石 1 個で終わるような戦略を持っているということである。

$n \pm 1$  から始めた時、 $L$  はその同じ戦略を使って最後に石 0 個、あるいは石 2 個（よってどちらの手番でも次に石を 2 個取るしかなく、最後石が 0 個になる）で終わる戦略が使えるのではないか？





絵であらわすと  
こんな感じ。



証明の要点： $n$  の帰結類が  $R$  であっても

$n$  からうまく石を取って  $R$  にできるとは限らない。

$R$  が先手で勝てる場合と、後手で勝てる場合それぞれ別に考える必要がある。

補題 (i)  $n$  から  $R$  が先手で勝てるならば、  
 $n \pm 1$  から  $L$  が先手で勝てる。

(ii)  $n$  から  $R$  が後手で勝てるならば、  
 $n \pm 1$  から  $L$  が後手で勝てる。

この補題を、帰結類の言葉で言い換えると



補題 (i)  $\mathcal{O}_S(n) \in \{\mathcal{R}, N\}$  ならば、  
 $\mathcal{O}_S(n \pm 1) \in \{\mathcal{L}, N\}$  である。

(ii)  $\mathcal{O}_S(n) \in \{\mathcal{R}, P\}$  ならば、  
 $\mathcal{O}_S(n \pm 1) \in \{\mathcal{L}, P\}$  である。

この補題から、定理の前半(1)から(3)が容易に従う。

実際、 $\mathcal{O}_S(n) = \mathcal{R}$  ならば、(i) および (ii) より  
 $\mathcal{O}_S(n \pm 1) = \mathcal{L}$  が従う。

また、(2) は (i) の特別な場合、

(3) は (ii) の特別な場合である。



補題 (i) と (ii) を同時に  $n$  についての帰納法で示す。

帰納法の前提として、 $n$  から着手できない時、  
仮定「 $R$  が勝てる」とは  $n$  が奇数ということであり、  
このとき  $n \pm 1$  は偶数なので、 $L$  が勝てる。

---

(i)  $n$  から **右手** が先手で勝てるならば  
 $n$  からうまく石を  $s \in S$  個とって、  
 $n-s$  は  $L$  が先手で勝てない、つまり  $R$  が後手で  
勝てる局面になる。

帰納法の仮定 (ii) より、 $n-s \pm 1$  は  $L$  が後手で  
勝てる局面である。そこで  $n \pm 1$  から、 $L$  は先手で  
 $s$  個の石を取って勝てることになる。

よって (i) がほぼ成り立つが、  
ひとつだけ余分にチェックが必要である。



$n$  から  $R$  が石を  $s$  個とって勝てるからと言って  
 $n=s$  であれば、 $n-1$  から  $L$  は  $s$  個の石を取るわけには  
いかない。同じ戦略が使えないのである。

しかし、 $n=s$  ならば、 $R$  の必勝戦略は、 $s$  個の石を  
とることではない。そんなことをしたら石が  $0$  個になり  
 $L$  の勝ちになってしまう。よって、 $R$  の必勝戦略は  
 $n=s$  個の石を取ることはないので、  
その場合だけはマネできないけれども  
負ける戦略をマネする必要はないのである。



次に(ii)  $n$  から右手が後手で勝てるとする。

つまりどの  $s \in S$  に対しても、 $s$  が  $n$  以下なら  $n-s$  から右手は先手で勝てる。

帰納法の仮定により、 $n-s \pm 1$  から、左手は先手で勝てる。よって  $n \pm 1$  から右手がどの  $s \in S$  個の石をとっても、 $s$  が  $n$  以下なら左手はそこから勝てる。

よって(ii) がほぼ成り立つが

再びひとつだけ余分なチェックが必要である。



$n+1$  が  $S$  の元であるとき、

$n$  から左手は  $n+1$  個の石を取ることはないが、  
右手は  $n+1$  から  $n+1$  個の石を取ることができるので  
その場合でも左手が勝てることを示す必要がある。

しかしこのとき、石が 0 個になるので、  
左手は何もしなくても既に勝っている。

よってこの場合も、大丈夫なのである。

以上で、定理の前半 (1) から (3) までの  
証明が完了した。



後半は、 $R$  の左右は  $L$ 、 $P$  の左右は  $P$  または  $L$

$N$  の左右は  $N$  または  $L$  であることが既に示されたので

あとは  $P$  は連続して出てきても高々  $s-1$  個しか続かない

$N$  が連続して出てきても、高々  $t-1$  個しか続かない、  
ということを示せば良い。

ただし  $s$  は  $S$  の一番小さい元、 $t$  は  $S$  の一番大きい元。



$s$  が  $S$  の元であり、 $n$  の帰結類が  $P$  であれば、  
 $n+s$  の帰結類は  $N$  である。実際、 $L$  も  $R$  も、  
 $n+s$  から先手で  $s$  個の石を取って勝てる。  
よって、 $P$  は  $s$  個続くことはできないし、  
 $P$  と  $N$  との間には必ず  $L$  がはさまるはずなので  
 $P$  は高々  $s-1$  個しか連続して出てこない。



次に、 $S$  の元は全て  $t$  以下であるとし、  
 $n, n+1, n+2, \dots, n+t-1$  が全て  $N$  だったとする。  
このとき、 $n+t+1$  からどの  $u \in S$  個とっても  
 $n, n+1, \dots, n+t-1$  のどれかになるので、  
 $n+t+1$  の帰結類は  $P$  である。このとき、 $n+t$  は  
 $P$  と  $N$  にはさまれて  $L$  にしかなり得ないので、  
 $N$  は高々  $t-1$  個しか連続して出てこない。

以上で、定理の証明が完了した。



4. P-position の偏りと

Carret の定理



同じ除去可能数集合 $S$ で、正規形のNIMと  
Ending Partizan NIM とでは、帰結類に関するはあるか？

一般には、あまり関係なさそう：

帰結類はどちらも周期を持つが、

周期が互いに素になるケースが多い。

2 を含み、最大が  $2^1$  以下の524287個の $S$ のうち

Ending Partizan の周期が2以上で

正規形のグランディー数の周期の約数になるものは

28051個、わずか5%ほどである。



一方で、その5%のうちで、  
Ending Partizan の帰結類が  $P$  になるとき、

不思議なことに正規形でも

ほとんどの帰結類が  $P$  になることを井上くんが発見した。  
 $s$  が 2 を含み、最大21以下の時、1 回目の周期までに出てくる

$P$  の個数は23325個、そのうち1050個を除いて  
つまり95%以上で、正規形でも帰結類が  $P$  になる。

この現象のひとつの説明として、  
ポルトガルでの第5回組合せゲームシンポジウムの際に  
次の命題が発見された。



## 定理 (François Carret)

$S$  は 2 以上の自然数からなる除去可能数集合とする。  
 $S$  による Ending Partizan Nim において、 $n$  の帰結類が  $R$  なら

正規形での  $n$  の帰結類は常に  $P$  であるとする。

このとき、 $n$  の帰結類が  $P$  なら、

正規形での帰結類も  $P$  である。

(例えば終了局面以外に 帰結類  $R$  が出てこないなら

定理の仮定は自動的に成り立つ。

また、 $P$  と終了局面以外の  $R$  が両方出てくる  $S$  は少ない?)

$S$  が 2 を含み、最大元が 21 以下のとき  
 $P$  が出てくるのが 2.5%、 $R$  が出てくるのが 3.6%、  
両方出てくるのが 0.77%



証明)

$n$  について、帰納法。

$n$  の帰結類が  $P$  であるならば、  
任意の  $n$  以下の  $S$  の元  $s$  に対し、

$n-s$  の帰結類は  $N$  である。

よって、 $n-s$  から  $t$  個石をとって  
 $n-s-t$  の帰結類は  $R$  または  $P$  にできる。

定理の仮定と帰納法の仮定より

$n-s-t$  の正規形での帰結類は  $P$  である。

よって、 $n-s$  の正規形での帰結類は  $N$  である。

$n$  からどう石を取っても  $N$  になるので

正規形での  $n$  の帰結類は  $P$  である。 (証明終)



## 5. Nowakowski の正規化



## Nowakowski の正規化

Ending Partizan Nim を、次のようにして  
正規形のゲームだとみなすことができる。

着手不可能で L が勝ちとされる局面を、

$1=\{0|\}$  で置き換え、

着手不可能で R が勝ちとされる局面を、

$-1=\{|\ 0\}$  で置き換える。

これにより、Ending Partizan Nim の

それぞれの局面に、帰結類のみならず

Conway のゲーム値を定義することができる。



## Nowakowski 正規化でのゲーム値の計算例

$S=\{2,3\}$  とする。

| 0 | 1  | 2     | 3       | 4            | 5 | 6 | 7     | 8         | 9           | 10 | 11 | 12    |
|---|----|-------|---------|--------------|---|---|-------|-----------|-------------|----|----|-------|
| 1 | -1 | $1^*$ | $\pm 1$ | $\{1^* -1\}$ | 1 | 0 | $1^*$ | $\{1 0\}$ | $\{1^* 0\}$ | 1  | 0  | $1^*$ |

ただし、 $1^*=\{1|1\}$ 、 $\pm 1=\{1|-1\}$  である。

以上の計算により、5 以上で周期 5 を持つ。

問題：全ての有限集合  $S$  に対して

Nowakowski 正規化のゲーム値は周期的になるか？

Observation: 残りが 0 なら L、1 なら P として

Ending Partizan をやると、ゲーム値が純周期的。

L が有利になることを、こういう議論で示せないか？



注意：Nowakowski 正規化と違う方法による、

ある種 Conway 式のゲーム値の定義が

末續鴻輝氏の講演で紹介される予定である。

両者の違いは、Ending Partizan Nim いくつかの

Disjunctive Sum を考えた時

(つまり、複数山にして、どれか一山に着手できる時)

Nowakowski → より多くの山で勝った方が勝ち

(Scoring ゲームとみなせる)

末續 → 全体で残った石の偶奇で勝敗判定



# 6. Ending Partizan Quotient & Unifying Theorem



## Ending Partizan Quotient

除去可能数集合  $S$  を固定し、

末續氏のやり方で、Ending Partizan NIM を  
複数山に拡張する。

つまり、山を一つ選び、 $s \in S$  個の石を取る。

最後に残った石の個数が

偶数個なら  $L$  の勝ち、奇数個なら  $R$  の勝ち。

$M$  を、任意個数の山の局面全体がなす集合とする。



M は局面全体がなす集合

M の元  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$

に対し、M の積  $xy$  を

$xy = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$

と定義する。

Disjunctive Sum (ゲームの和) なので

足し算の記号を使いたくなるが、

逆形商では積を使うのが一般的慣習。

非可換ではあるが結合則を満たし、モノイドをなす。



$M$  の元  $x$  に対し、 $\mathcal{O}(x)$  を  $x$  の帰結類と定義する。

$\mathcal{O}(x)$  は  $P, N, L, R$  のどれかである。

$M$  の関係  $\sim$  を

$x \sim y \iff$  任意の  $z \in M$  に対し  $\mathcal{O}(xz) = \mathcal{O}(yz)$   
と定義する。

命題 (1)  $\sim$  は同値関係である。

(2)  $x \sim y$  ならば  $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$  が成り立つ。

(3)  $x_1 \sim x_2, y_1 \sim y_2$  ならば  
 $x_1 y_1 \sim x_2 y_2$  である。



$M$  を同値関係  $\sim$  で割った商集合  $Q=M/\sim$  を  
Ending Partizan Quotient とよぶ。

商写像 を  $\Phi : M \rightarrow Q$  と書く。

$Q$  から  $\{P, N, L, R\}$  への帰結類写像  $O$  が定義でき、

$O(\Phi(x)) = O(x)$  が成り立つ。

(というか、こう定義すると well-defined になる。)

また、 $Q$  の元  $\Phi(x), \Phi(y)$  の積を

$$\Phi(x)\Phi(y) := \Phi(xy)$$

と定義すると、これは  $x, y$  の取り方によらず well-defined.

これにより  $Q$  は可換モノイドになり、

$\Phi$  は帰結類を保つモノイド準同型になる。



## Ending Partizan Quotient $Q$ と

商写像  $\Phi: M \rightarrow Q$ 、帰結類写像  $\circ: Q \rightarrow \{P, N, L, R\}$

が具体的に計算できるならば、

多数山の Ending Partizan Nim の必勝戦略が計算できるが

(楽観的) 予想：除去可能数集合  $S$  が有限集合ならば  
 $Q$  は有限モノイドになる。

定理：上記の予想が正しい  $S$  に対しては  
 $Q, \Phi, \circ$  を具体的に計算するアルゴリズムが存在する。

(詳細は稲津くんの講演で)



例：糸切りゲーム

何本かの糸がある。

各プレイヤーを、糸を一本とり、2本に切り分ける。

ただし、単位長さ1が決められていて、  
どちらの糸も長さが1以上になるように  
切らないといけない。

正規形だと一松信『石とりゲームの数理』3章2節に

「長さ  $m$  の糸のグランディー数  $g(m)$  は  
 $m \geq 71$  で周期12を持つ。」

ことが証明されている。

「良い庭石、菜に岩鮎」という覚え歌も。

4 1 2 8 1 4 7 2 1 8 2 7



一方、逆形の糸切りゲームの逆形商は

Siegel "Combinatorial Game Theory"

5章4節 Misere Quotients で計算されていて

糸の長さ  $m$  に対し 逆形商写像  $\Psi(m)$  の表が作られている。

$m \geq 7$  で周期的になり、周期 1 2 を持つ。

両方を統一的に見ることはできないか？

川上~稲津のアイデア：

Ending Partizan は正規形と逆形の統一理論になる！



糸が何本もあるとき、糸の本数の偶奇で、  
局面の偶奇を定義する。

糸切りゲームでは、糸を切るごとに  
糸が1本増えるので、偶奇が入れ替わる。

Ending Partizan の帰結類は、正規形と逆形の帰結類から定まる：

初期局面で糸が偶数本の時

| 正規<br>逆形 |   | P | N |
|----------|---|---|---|
| P        | P | P | R |
| N        | N | L | N |

奇数本の時

| 正規<br>逆形 |   | P | N |
|----------|---|---|---|
| P        | P | P | L |
| N        | N | R | N |



よって、 $M$  の同値関係  $\approx$  を

$$x \approx y \iff \begin{cases} (1) \text{ 任意の } z \text{ に対し} \\ \quad O(x+z) = O(y+z) \\ (2) x \text{ と } y \text{ の偶奇が一致する。} \end{cases}$$

の 2 条件がともに成立する。

として Quotient  $M/\approx$  を定義すると、

$$M/\approx \begin{cases} \nearrow \mathbb{Z}_{\geq 0} & \text{(グランディー数写像)} \\ \searrow \text{逆形商} & \text{(自然な全射)} \end{cases}$$

がそれぞれ定義される。



より一般に、

Parity Partizan (稲津 - 川上 - 井上)

ゲーム開始から終了までの着手回数が

偶数回なら L の勝ち、奇数回なら R の勝ち

Unifying Theorem Parity Partizan の帰結類は

| 正規形<br>逆形 |   | P | N |  |
|-----------|---|---|---|--|
| P         | P | P | R |  |
| N         | N | L | N |  |
|           |   |   |   |  |

系

G が Tame



L または R なら  
グランディー数は  
1 以下。



## 7. Future Work



(1) 今までのところ、偶数 $\rightarrow$ L、奇数 $\rightarrow$ R のケースしか詳しく調べられていない。他の勝敗ルールでも何か面白い現象が起こるのでは？

(2) なぜLが有利になるのか、井上-門脇を超えた理由がありそうに思われる。

(3) Nowakowski の正規化でのゲーム値をもっと計算したい。周期性は成り立つ？

また、終了局面での値を1、-1のみならず他のゲームの局面にしたら、どうなるか？

ゲーム値が純周期を持つのはいつか？



(4) Quotient の計算例をもっと増やしたい。

Quotient の有限性は本当に成り立つのか？

3 で割って余り  $0 \rightarrow L$ 、余り  $1 \rightarrow R$ 、余り  $2 \rightarrow P$

と勝敗を定めると、 $S=\{3,4\}$  でも

Quotient の有限性は成り立たないように見える。

その場合でも Quotient の計算はできるのか？

(5) どんな  $S$  に対して、ある番号から先が全て  
 $L$  になるかを判定できるか？

(部分解は、和田くんの講演で)



ご清聴、ありがとうございました。