

川上滉太氏の
ゲームの超限グランディー数
の前座

順序数の定義

木村俊一

普通の数学では

$$1=0.9999\dots \text{（9 が無限に続く）}$$

と習うが、超現実数の世界では

$$1>0.9999\dots \text{（9 が無限に続く）}$$

と解釈できるような現象が起こる。

今日の川上くんの講演では ω を最小の無限順序数として

ω^ω と 2^ω との大小関係で

驚くべき現象が起こることが紹介される。

集合 X が整列順序集合であるとは

X に全順序 $>$ が定義されていて

X の空でない任意の部分集合 S が最小元を持つこと。

有限全順序集合や、自然数は

整列順序集合の基本的な例だが、

非負整数の直和 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に Lex order を入れると

non-trivial な整列順序集合の重要な例になっている。

(川上くんの発表にあらわれるはず)

選択公理を仮定すると、

任意の集合にうまく順序を入れて整列順序集合にできる。

X と Y が整列順序集合であるとき、
写像 $f: X \rightarrow Y$ が整列順序集合の射であるとは
次の 2 条件を満たすこと、と定義する。

- (1) $x_1, x_2 \in X$ が $x_1 > x_2$ を満たせば、
 $f(x_1) > f(x_2)$ を満たす。
- (2) f は部分集合の最小元を、次の意味で
保つ：部分集合 $S \subset Y$ が $f^{-1}(S) \neq \emptyset$
を満たすならば、 $x_0 \in f^{-1}(S)$ を最小
元とすると $f(x_0) \in S$ は S の最小元
になる。

条件 (1) から f が単射であることが従う。

また、条件 (2) から、 $y \in \text{Im}(f)$ で $y' < y$ なら $y' \in \text{Im}(f)$ であることが従う。 $S = \{y', y\}$ に対して (2) を適用すれば良い。

逆に $\text{Im}(f)$ が、より小さい元について閉じていれば、条件 (2) が成り立つ。

これらを用いて、整列順序集合 X から Y へ射があればそれは一意であることを示すことができる。

特に X から Y へ射があり、 Y から X へも射があれば、それらは互いに逆写像となり、 X と Y は同型であることが従う。

一方、 X から Y か、 Y から X か、

少なくとも一方の射が存在することもわかる。

以上より、 X と Y が整列順序集合であれば

- (1) X から Y へ射があるが、 Y から X へは射はない。
- (2) X と Y は同型である。
- (3) X から Y への射はないが、 Y から X への射はある。

のどれか一つ、そして一つのみが成り立つことがわかる。

順序数を、整列順序集合の圏の同型類がなすクラス
と定義する。

X から Y へ射があるときに $X \leq Y$ と書くことにすると
順序数全体が整列順序クラスをなす。

$$\omega^\omega := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$$

には自然に整列順序集合の構造が入る。

ω^ω より小さい順序数、つまり

$S \subsetneq \omega^\omega$ を満たす順序数 S に対して

$\omega^\omega \setminus S$ の最小元

$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, 0, \dots)$

$$= a_0 + \omega \cdot a_1 + \omega^2 \cdot a_2 + \dots + \omega^n \cdot a_n$$

を、 S の Cantor Normal Form
とよぶことにする。

川上くんのゲームBでは
自然数全体 $\mathbb{N}$ に全順序を定義して

$$\mathbb{N} \rightarrow \omega^\omega$$

という同型写像を構成する。

つまり、 ω^ω が可算集合であることが示される。

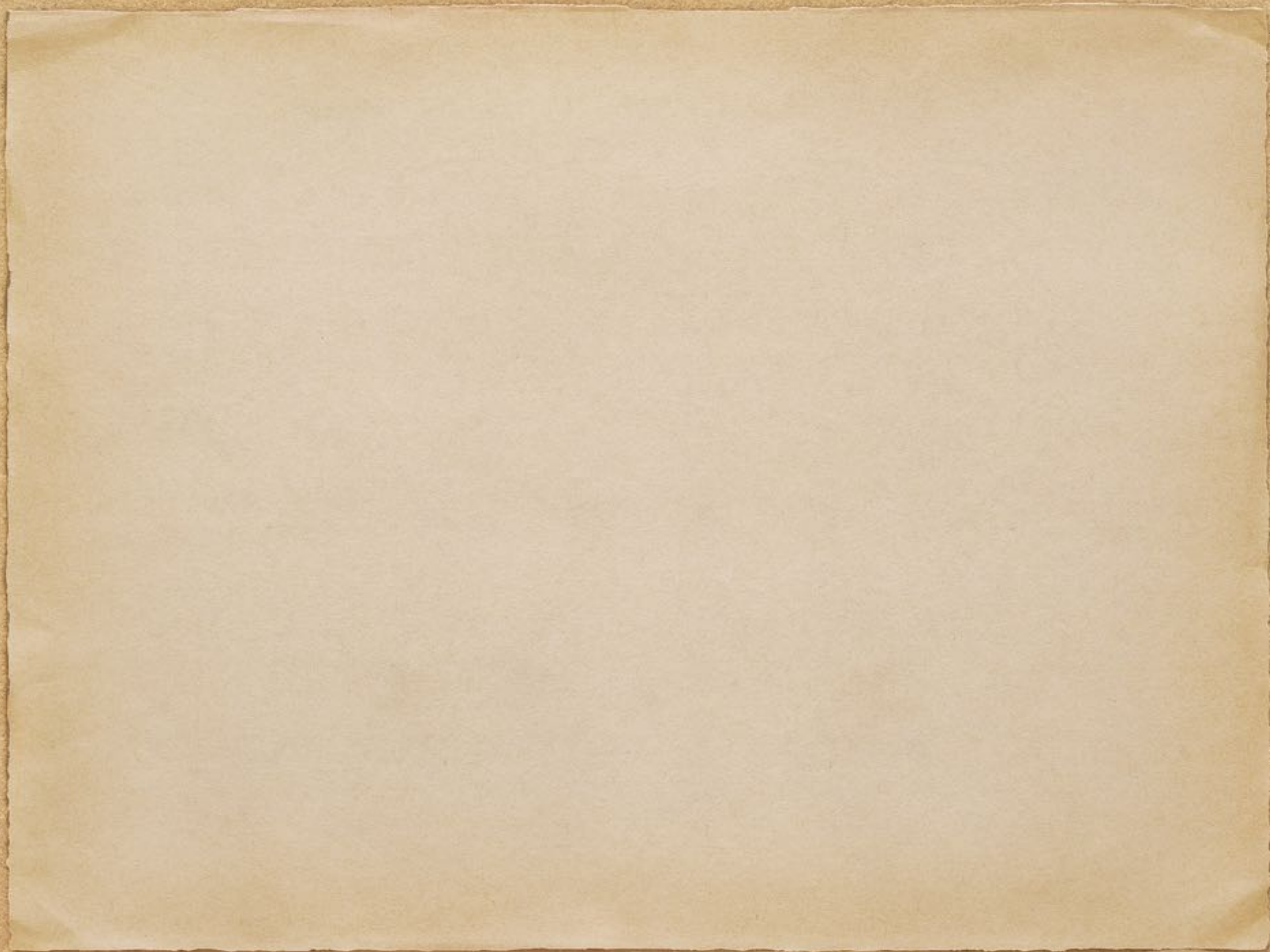
一方、 X が集合のとき、 2^X は X の部分集合全体が

なす集合だと解釈すると

2^ω は連続濃度であり、非可算集合である。

ふたつの冪乗が違う意味に使われているため、

$2^\omega \not\geq \omega^\omega$ という非常に非直感的な式が成り立つ。



整列順序集合の射の一意性

$f, g : X \rightarrow Y$ が $f \neq g$ を満たすと仮定して矛盾を導く。 $S = \{x \in X \mid f(x) \neq g(x)\}$ とおき、 $x_0 \in S$ をその最小元とすると、 $x < x_0$ ならば $f(x) = g(x)$ が成り立つ。一般性を失わず $f(x_0) < g(x_0)$ としてよい。条件 (2) より $g(x') = f(x_0)$ となる $x' \in X$ が存在するが、 $g(x') < g(x_0)$ なので条件 (1) より $x' < x_0$ であり、 x_0 の最小性から $x' \notin S$ である。よって $f(x') = g(x') = f(x_0)$ となり、 f の単射性に矛盾する。

整列順序集合の間の射の存在

X, Y を順序数とする。順序数 S から X, Y への射 $f : S \rightarrow X$ と $g : S \rightarrow Y$ のペア $(f, g) : S \rightarrow X \amalg Y$ 全体がなす集合 M を考える。 $(f, g) : S \rightarrow X \amalg Y, (f_1, g_1) : T \rightarrow X \amalg Y$ が与えられた時。 $(f, g) \leq (f_1, g_1)$ とは $\varphi : S \rightarrow T$ という整列順序集合の射が存在し、したがって $f = f_1 \circ \varphi, g = g_1 \circ \varphi$ が成り立つこと、と定義する。このとき、 M は帰納的順序集合となり、Zorn の補題により極大元 $(f, g) : S \rightarrow X \amalg Y$ が存在する。

もし $f(S) \subsetneq X$ かつ $g(S) \subsetneq Y$ ならば、 $X \setminus f(S)$ の最小元 x_0 、 $Y \setminus g(S)$ の最小元 y_0 、 $T = S \cup \{t\}$ (ただし t は S のどの元よりも大きいとみなす) をとり、 $(f_2, g_2) : T \rightarrow X \amalg Y$ を、 S 上では (f, g) で、また $t \rightarrow (x_0, y_0)$ と定義すると、 $(f, g) \leqneq (f_2, g_2)$ となり、 (f, g) の極大性に矛盾。よって一般性を失わずに $f(S) = X$ とすると S と X は同型となり、 $X \simeq S \rightarrow Y$ となつて、 X から Y への射が構成できた。