

制限ニムの mory 数列についてのいくつかの結果,
特に Conway の Folklore Theorem の証明

Results on Mory sequences of Restricted Nim,
including the proof of Conway's Folklore Theorem

(2024 年度修士論文)

広島大学大学院 M2 森脇 悠斗

2025.3.16

制限ニム

1

$(\emptyset \neq) S \subset \mathbb{N}$: 除去可能数 removable numbers の集合

制限ニム $G(S)$: $s \in S$ 個の石をとれる 1 山ニム

- $S = \{1, 2\}$ のとき, 必勝法は石を 3 の倍数個にすること.

G 数 (グランディ数) を計算すると

石の個数 n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
G 数 $g(n)$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	...

$g(n) = n \bmod 3$ (n を 3 で割った余り).

▶ G 数 $g(n) := \text{mex}_{s \in S_{\leq n}} g(n - s)$. ▶ $\text{mex } A := \min(\mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus A)$.

$(\emptyset \neq) S \subset \mathbb{N}$: 除去可能数 remov(able numb)ers の集合

制限ニム $G(S)$: $s \in S$ 個の石をとれる 1 山ニム

● $S = \{1, 2\}$ のとき, 石 n 個の局面の G 数は $g(n) = n \bmod 3$.

G 数列は $[g(n)]_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} = [0, 1, 2, 0, 1, 2, \dots] = [\dot{0}, 1, \dot{2}]$.

▶ 列 $[a_n]_n$ が周期的 $\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists N \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \exists p \in \mathbb{N} \forall n \geq N [a_{n+p} = a_n]$.

$\rightarrow [a_n]_n = [a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, a_N, a_{N+1}, \dots, a_{N+p-1}]$ と表す.

p を周期と呼ぶ (最小のものをとる).

$(\emptyset \neq) S \subset \mathbb{N}$: 除去可能数 remov(able numb)ers の集合

制限ニム $G(S)$: $s \in S$ 個の石をとれる 1 山ニム

▶ 列 $[a_n]_n$ が周期的 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists N \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \exists p \in \mathbb{N} \forall n \geq N [a_{n+p} = a_n]$.
 $\rightarrow [a_n]_n = [a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, a_N, a_{N+1}, \dots, a_{N+p-1}]$ と表す.
 p を周期と呼ぶ (最小のものをとる).

- $S = \{1, 2\}$ のとき G 数列は (純) 周期列 $[0, 1, 2]$.
- $S = \{2, 4, 7\}$ のとき G 数列は $[0, 0, 1, 1, 2, 2, 0, 3, 1, 0, 2, 1, 0, 2, \dots]$
 $= [0, 0, 1, 1, 2, 2, 0, 3, 1, 0, 2]$.

2 項, 4 項, 7 項前のどれでもない最小の非負整数を次々並べた列

▶ 制限二ム $G(S)$ の G 数列を $\mathcal{G}_S$ と書くことにする.

Thm. 除去可能数集合 S が有限集合のとき, $\mathcal{G}_S$ は周期的.

略証

$g(n) = \max_{s \in S, s \leq n} g(n-s) \leq |S|$ は $s_r := \max S$ 項前までしか参照せず, 組 $(g(m), g(m+1), \dots, g(m+s_r-1))$ はいつか重複する.

Thm. $\mathcal{G}_S$ が周期 p をもつとき, p は除去可能数ではない.

略証

p が周期なら $g(n+p) = g(n)$,
 p が除去可能数なら $g(n+p) \neq g(n)$.

mory 数列

► 制限二ム $G(S)$ の G 数列を $\mathcal{G}_S$ と書くことにする.

Thm. 除去可能数集合 S が有限集合のとき, $\mathcal{G}_S$ は周期的.

Thm. $\mathcal{G}_S$ が周期 p をもつとき, p は除去可能数ではない.

そこで, 有限 $(\emptyset \neq) S_0 \subset \mathbb{N}$ を 1 つとり $\mathcal{G}_{S_0}$ の周期を p_0 とする.

$S_1 := S_0 \cup \{p_0\}$ とおき, $\mathcal{G}_{S_1}$ の周期を p_1 とすると $p_1 \neq p_0$.

$S_2 := S_1 \cup \{p_1\}$ とおき, $\mathcal{G}_{S_2}$ の周期を p_2 とすると $p_2 \neq p_0, p_1$.

これを繰り返して各 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し p_l を定めるとそれらは必ず相異なる. ► S_0 に対する mory 数列 $\mathbf{p}_{S_0} := [p_l]_l$.

(周期を次々 “more and more” 追加することから命名)

mory 数列

- ▶ 有限 $(\emptyset \neq) S_0 \subset \mathbb{N}$ を1つとり $\mathcal{G}_{S_0}$ の周期を p_0 とし, 順次 $S_{l+1} := S_l \cup \{p_l\}$ とおき, $\mathcal{G}_{S_{l+1}}$ の周期を p_{l+1} としていって各 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し相異なる p_l を定める.
- ▶ S_0 に対する mory 数列 $\mathbf{p}_{S_0} := [p_l]_l$.

Note

- Wythoff Nim
 - ... 2山ニムは石の個数を揃えるのが必勝法
 - 両方の山から同数とる着手を許すことでその戦略を崩した.
- $G(S_{l+1})$
 - ... $G(S_l)$ は十分大きい所では $\text{mod } p_l$ でどちらが必勝か決まる
 - p_l 個とる着手を許すことでその戦略を崩した.

mory 数列

- ▶ 有限 $(\emptyset \neq) S_0 \subset \mathbb{N}$ を 1 つとり $\mathcal{G}_{S_0}$ の周期を p_0 とし, 順次 $S_{l+1} := S_l \cup \{p_l\}$ とおき, $\mathcal{G}_{S_{l+1}}$ の周期を p_{l+1} としていって 各 $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し相異なる p_l を定める.
- ▶ S_0 に対する mory 数列 $\mathbf{p}_{S_0} := [p_l]_l$.

Note

- 具体的な有限集合 S が与えられると G 数列 $\mathcal{G}_S$ の項をいくらでも計算するアルゴリズムは存在する (周期判定には有限項で十分) が, その S と $\mathcal{G}_S$ の関係はまだまだよくわかっていない.
 - $|S| = 3$ としても周期の公式は知られていない.
 - Nowakowski 氏が [4] で周期の上限など未解決問題を提示.

mory 数列

- $S_0 = \{1, 2\}$ のとき, $\mathcal{G}_{S_0}$ は周期 3 だった.

$$p_0 = 3, S_1 = \{1, 2, 3\}.$$

今度は 4 の倍数にするのが必勝法, よって $\mathcal{G}_{S_1}$ は周期 4.

$$p_1 = 4, S_2 = \{1, 2, 3, 4\}.$$

次は 5 の倍数にするのが必勝法, なので $\mathcal{G}_{S_2}$ は周期 5.

$$p_2 = 5, S_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

以下同様にすると

$$p_l = l + 3, S_{l+1} = \{1, 2, 3, \dots, l + 2, l + 3\} \quad (l \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

となり, $S_0 = \{1, 2\}$ に対する mory 数列は

$$\mathbf{p}_{1,2} = [3, 4, 5, 6, \dots].$$

- $S_0 = \{1, 2\}$ のとき, $G(S_l)$ は $l+3$ の倍数にするのが必勝法で

$$p_l = l + 3, S_{l+1} = \{1, 2, 3, \dots, l + 2, l + 3\} \quad (l \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

となり, mory 数列は

$$\mathbf{p}_{1,2} = [3, 4, 5, 6, \dots] = [\dot{3}](+1).$$

▶ 数列 $[a_n]_n$ が加法的周期的

* $q = 0$ なら周期的.

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists N \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \exists p \in \mathbb{N} \exists q \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \forall n \geq N [a_{n+p} = a_n + q].$$

このとき

$$[a_n]_n = [a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, a_N, a_{N+1}, \dots, a_{N+p-1}](+q)$$

と表す. (最小の周期 p に対する) q を増分という.

- $\mathbf{p}_{2,3} = [5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, \dots]$.
- $\mathbf{p}_{6,7,8,9,10} = [16, 22, 28, 34, 40, 46, 52, 58, 64, \dots]$.
- $\mathbf{p}_{100,101,102,\dots,198,199,200} = [300, 400, 500, 600, \dots]$.

一般式を予想してみてください.

- $\mathbf{p}_{2,3} = [5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, \dots]$.
- $\mathbf{p}_{6,7,8,9,10} = [16, 22, 28, 34, 40, 46, 52, 58, 64, \dots]$.
- $\mathbf{p}_{100,101,102,\dots,198,199,200} = [300, 400, 500, 600, \dots]$.

Thm1. 一般に, $a \leq b$ に対し

$$\mathbf{p}_{a,a+1,\dots,b-1,b} = [a \dot{+} b](+a).$$

(初項 $a + b$, 公差 a の等差数列)

$$\begin{aligned} \bullet \mathbf{p}_{a,a+1,\dots,b-1,b} &= [a \dot{+} b](+a) \\ &= [a + b, 2a + b, 3a + b, \dots] \quad (\text{等差数列}) \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow G(a, a + 1, \dots, b - 1, b, a + b, \dots, ja + b)$ の
 G 数列の周期が $(j + 1)a + b$ となる ($j = 0, 1, 2, \dots$).

G 数を予想 ↓

Claim. 上記の制限ニムの G 数は

$$g(n) = \left\lfloor \frac{n \bmod ((j+1)a+b)}{a} \right\rfloor \quad (a \text{ で割った商})$$

帰納法で証明 ↓

証明のアイデア

13

$a = 10, b = 37, j = 3$ として G 数確かめてみる.

$G(10, 11, 12, 13, \dots, 33, 34, 35, 36, 37, 47, 57, 67)$ で,

$g(n) = \lfloor \frac{n \bmod 77}{10} \rfloor$ となっほしい.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7

77 未満の値を 10 で割った商を 10 個ずつ並べた.

元の局面が水色,
選択枝が橙色のマスに対応
(77 で割った商が元より
小さい選択枝は下に出現).

■ = mex ■を確認する.

- $\mathbf{p}_{1,6} = [\dot{7}, \dot{1}2](+6).$
- $\mathbf{p}_{1,10} = [\dot{1}1, \dot{2}0](+10).$
- $\mathbf{p}_{1,15} = [2, \dot{1}6, 17, \dot{3}0](+15).$
- $\mathbf{p}_{1,21} = [2, \dot{2}2, 23, \dot{4}2](+21).$
- $\mathbf{p}_{1,25} = [2, 3, 4, \dot{2}6, 27, 28, 29, \dot{5}0](+25).$
- $\mathbf{p}_{1,35} = [2, 3, 4, \dot{3}6, 37, 38, 39, \dot{7}0](+35).$

こちらも一般式を予想して見ていただきたい。

- $\mathbf{p}_{1,6} = [\dot{7}, \dot{12}](+6).$
- $\mathbf{p}_{1,10} = [\dot{11}, \dot{20}](+10).$
- $\mathbf{p}_{1,15} = [2, \dot{16}, 17, \dot{30}](+15).$
- $\mathbf{p}_{1,21} = [2, \dot{22}, 23, \dot{42}](+21).$
- $\mathbf{p}_{1,25} = [2, 3, 4, \dot{26}, 27, 28, 29, \dot{50}](+25).$
- $\mathbf{p}_{1,35} = [2, 3, 4, \dot{36}, 37, 38, 39, \dot{70}](+35).$
- 一般に, $b \geq 2$ に対しその最小素因数を c として

$$\mathbf{p}_{1,b} = [2, 3, \dots, c-1, b\dot{+}1, b+2, \dots, b+c-1, \dot{2}b](+b).$$

- 一般に, $b \geq 2$ に対し

その「2 以上の約数のうち最小のもの」を c として

$$\mathbf{p}_{1,b} = [2, 3, \dots, c-1, b+1, b+2, \dots, b+c-1, 2b](+b).$$

↓

Thm2. より一般に, $b \geq t$ に対し

その「 t 以上の約数のうち最小のもの」を c として

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{1,2,\dots,t-1,b} \\ = [t, t+1, \dots, c-1, b+1, b+2, \dots, b+c-1, 2b](+b). \end{aligned}$$

$S = \{1, a, b\}$ ($1 < a < b$) に対する mory 数列を, 以下に挙げる 3 パターンに関して突き止めた.

Thm3. a が奇数, b が偶数ならば,

$$\mathbf{p}_{1,a,b} = [a \dot{+} b, 2\dot{b}](+b).$$

* $c \geq a$ だと **Thm2**に帰着するが詳細は省略.

Thm4. a が素数, b が奇数で, b の最小素因数 $c < a$ ならば,

$$\mathbf{p}_{1,a,b} = [2, 3, \dots, c-1, b \dot{+} 1, b+2, \dots, b+(a \bmod c)-1, \\ b+(a \bmod c)+1, \dots, b+c-1, a+b, 2\dot{b}](+b).$$

Thm5. a が偶数, $b = 2a$ ならば,

$$\mathbf{p}_{1,a,2a} = [3\dot{a}](+a).$$

Thm3で $b = 2a$ とすると a : 奇数でも

$\mathbf{p}_{1,a,2a} = [3\dot{a}, 4\dot{a}](+2a) = [3\dot{a}](+a)$ だが...

Conj. 周期は $x + y, x + z, x + z$ のうち 1 つ以上の組の gcd に等しい
($z \neq x + y$ のとき).

右は $S = \{1, a, b\}$ での周期の
表 (各列最上行では $b = 1 + a$).

予想における 7 通りの値のど
れに該当するかを色で表した.

$z < 4096$ の範囲では成立 [1].

どれなのかは難解である.

* 網掛けは現在判明している
mory 数列から成立がわかる
部分.

$\backslash$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2												
3	4											
4	3	7										
5	3	2	8									
6	7	9	5	11								
7	3	2	8	2	12							
8	3	11	12	13	7	15						
9	10	2	5	2	5	2	16					
10	3	13	11	15	16	17	9	19				
11	3	2	5	2	12	2	19	2	20			
12	13	15	13	17	18	19	20	21	11	23		
13	3	2	17	2	7	2	7	2	23	2	24	
14	3	17	5	19	5	21	22	23	24	25	13	27
15	16	2	16	2	7	2	16	2	25	2	27	2
16	3	19	5	21	17	23	24	25	26	27	28	29
17	3	2	18	2	23	2	9	2	9	2	29	2
18	19	21	22	23	19	25	26	27	28	29	30	31
19	3	2	5	2	25	2	9	2	20	2	31	2
20	3	23	21	25	7	27	7	29	30	31	32	33

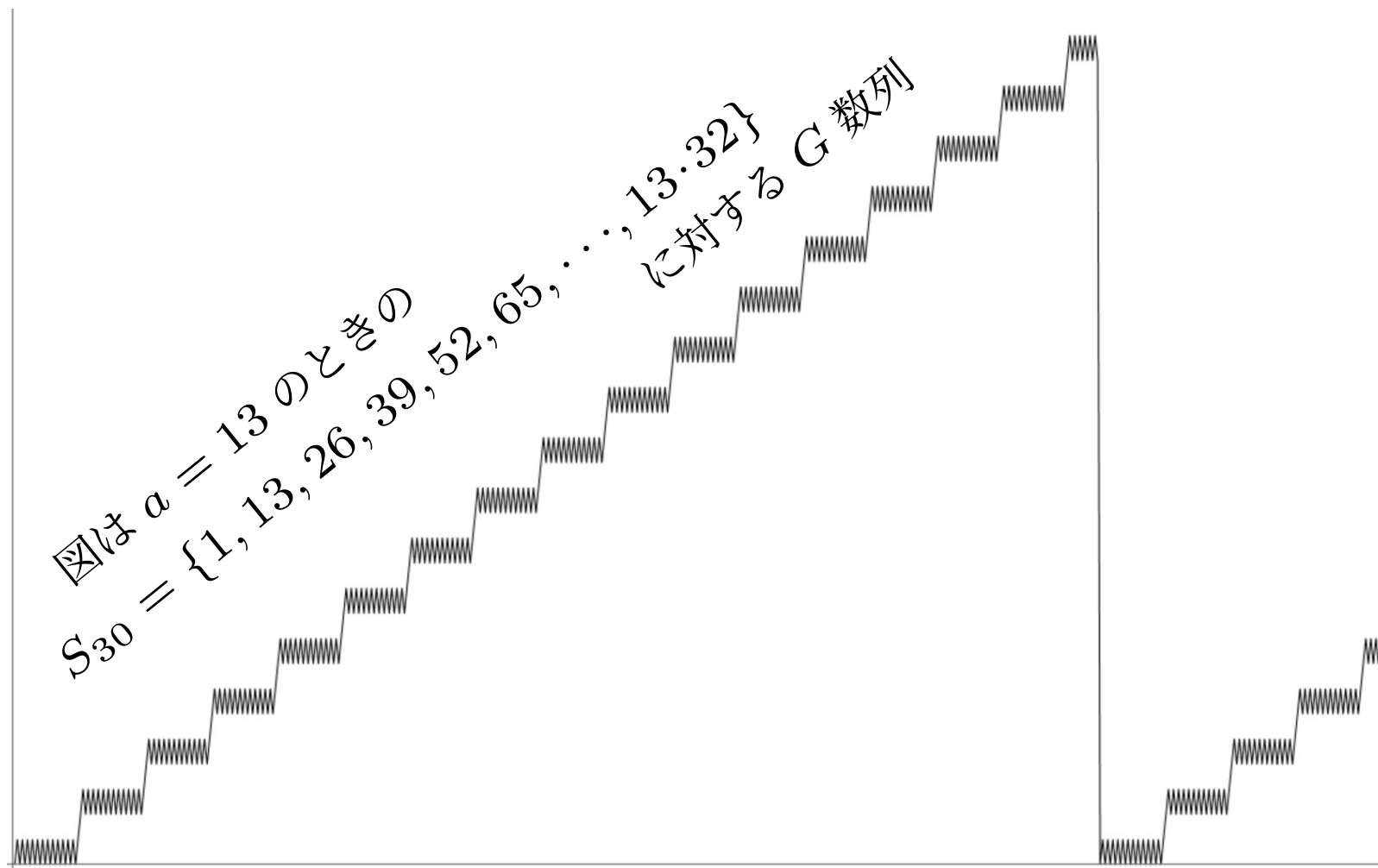
*複数該当の場合
上優先

$$p = \begin{cases} 1 + a \\ 1 + b \\ a + b \\ \gcd\left\{\begin{matrix} 1 + a \\ 1 + b \end{matrix}\right\} \\ \gcd\left\{\begin{matrix} 1 + a \\ a + b \end{matrix}\right\} \\ \gcd\left\{\begin{matrix} 1 + b \\ a + b \end{matrix}\right\} \\ \gcd\left\{\begin{matrix} 1 + a \\ 1 + b \\ a + b \end{matrix}\right\} \\ 2a \end{cases}$$

特徴的な G 数列

19

- Thm5について, $\mathbf{p}_{1,a,2a} = [3a](+a)$ (a : 奇数) における

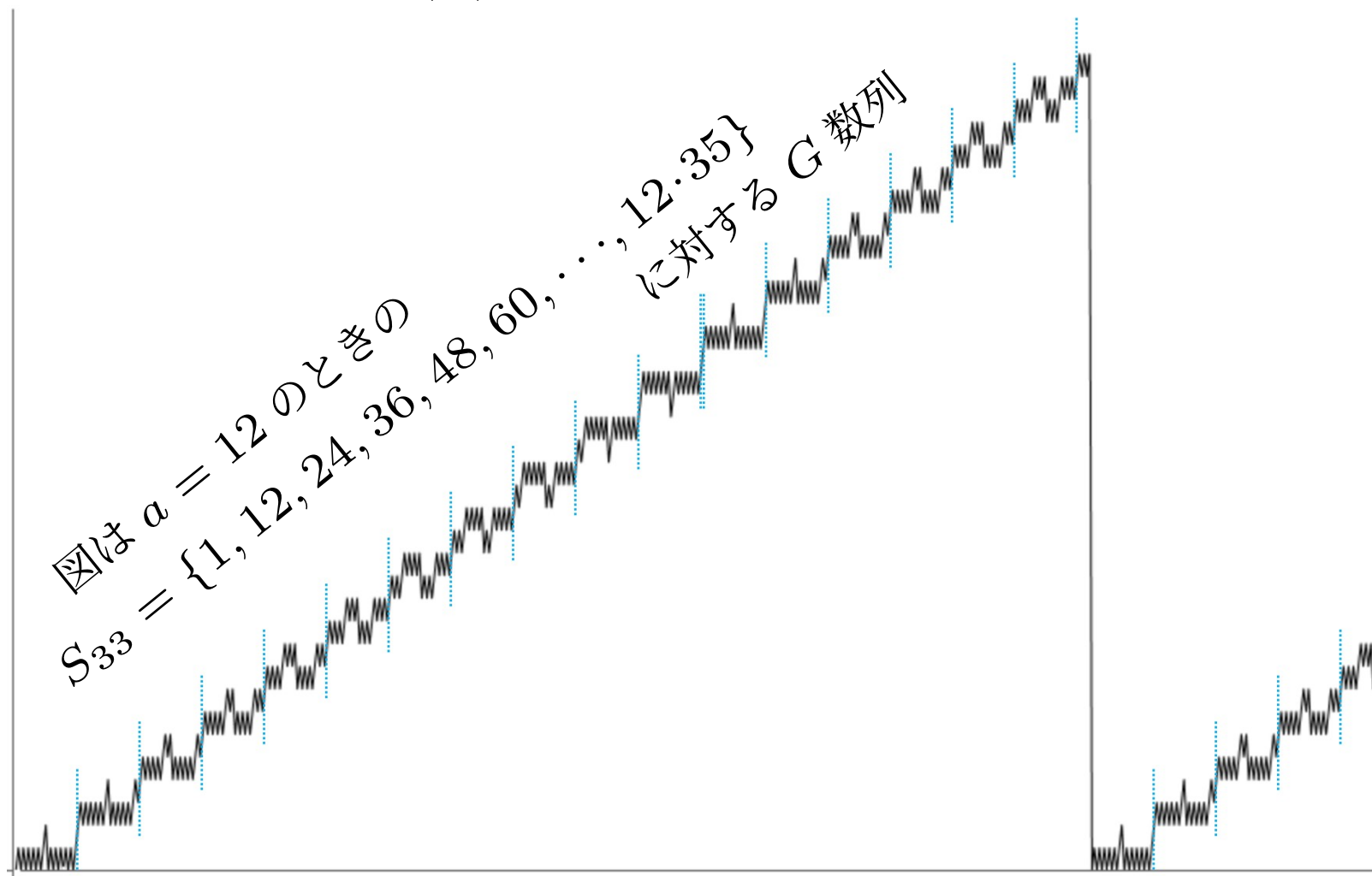


$\mathcal{G}_{S_l}$ を折れ線グラフで表すとこのようにシンプルになる.

特徴的な G 数列

20

- Thm5について, $\mathbf{p}_{1,a,2a} = [\dot{3a}](+a)$ (a : 偶数) における



$\mathcal{G}_{S_l}$ を折れ線グラフで表すと複雑になる. G 数を表で表すと...

- (結果 (2) より再掲) $b \geq 2$ に対しその最小素因数を c として

$$\mathbf{p}_{1,b} = [2, 3, \dots, c-1, b \dot{+} 1, b+2, \dots, b+c-1, 2\dot{b}](+b),$$

特に b が偶数ならば $c = 2$ で

$$\mathbf{p}_{1,b} = [b \dot{+} 1, 2\dot{b}](+b).$$

この一般化として次が成立すると分かった.

Thm6. $k := \left\lceil \frac{b}{a} \right\rceil$ が偶数ならば,

$$\mathbf{p}_{a,b} = [a \dot{+} b, ka \dot{+} b](+ka).$$

- $k := \lceil \frac{b}{a} \rceil$ が偶数ならば, $\mathbf{p}_{a,b} = [a \dot{+} b, ka \dot{+} b](+ka)$.

では k が奇数のときはどうか.

現時点での結果は, $a \geq 2$ とし b を a で割った余りを r として

$$\mathbf{p}_{a,b} = [\underbrace{a+b}_{\downarrow \text{よく知られている}}, \underbrace{a(2b+r)}_{\uparrow !!}, \underbrace{a(2b+r+1)}_{\uparrow}, \underbrace{a((2a+1)b+(a+1)r)}_{\downarrow \text{Conj}}, \dots].$$

不明 ↓

Thm7 (検証済み)

例. $\mathbf{p}_{2,13} = [15, 54, 56, 136, 3864, \dots]$.

- $k := \lceil \frac{b}{a} \rceil$ が奇数のとき, b を a で割った余りを r として

$$\mathbf{p}_{a,b} = [a+b, \underline{a(2b+r)}, a(2b+r+1), \underline{a((2a+1)b+(a+1)r)}, \dots].$$

↑

Folklore!!

予想

フォークロア (民間伝承)

文献としては残っていないが正しいと思われる定理などを指す.

$\mathcal{G}_{a,b,a+b}$ が周期 $a(2b+r)$ となることは Conway et al. の本 [2] で証明されていると言われている (いた) が, 見てみると具体例を 1 ついい加減に計算した後最終的な結果を述べているに過ぎなかった.

$k = \lceil \frac{b}{a} \rceil$ が奇数のときの $G(a, b, a + b)$ の G 数列

24

$$\boxed{0} := \llbracket 0_a, 1_a \rrbracket_K \quad r = b \bmod a, \quad K := \frac{k-1}{2}, \quad \bar{j} := jr \bmod a, \quad \tilde{j} := \bar{j} + r - a$$

$$\boxed{j}_1 := \llbracket 0_{\bar{j}}, 2_{a-\bar{j}}, 1_{\bar{j}}, 3_{a-\bar{j}}, \llbracket 2_a, 3_a \rrbracket_{K-1} \rrbracket$$

添字は繰り返す回数.

$$\boxed{j}_2 := \begin{cases} \llbracket 2_{\bar{j}+r}, 0_{a-\bar{j}}, 3_{\bar{j}}, 1_{a-\bar{j}}, \llbracket 0_a, 1_a \rrbracket_{K-1} \rrbracket & (\bar{j} < a - r) \\ \llbracket 2_a, 3_{\tilde{j}}, 0_{a-\bar{j}}, 3_{a-r}, 2_{\tilde{j}}, 1_{a-\bar{j}}, \llbracket 0_a, 1_a \rrbracket_K \rrbracket & (\bar{j} \geq a - r) \end{cases}$$

$$\boxed{a} := \llbracket \llbracket 2_a, 3_a \rrbracket_K, 2_r \rrbracket$$

として,

$$[\overset{\cdot}{\boxed{0}}, \boxed{1}_1, \boxed{1}_2, \boxed{2}_1, \boxed{2}_2, \dots, \boxed{a-1}_1, \boxed{a-1}_2, \overset{\cdot}{\boxed{a}}]$$

と, 結果としては小ぎれいに表せたが, 証明は地道にするしかない. その一片をお見せする...

mory 数列による無制限二ム

25

mory 数列の作り方において、出てきた周期を 1 つずつ除去可能数に追加していつている。

$$G(\overbrace{1, a, 2a}^{\text{初期}}, \overbrace{3a, 4a, \dots, ja}^{\text{追加分 (有限個)}})$$

mory 数列が判明すると、全ての値を追加することもできる。

$$G(\overbrace{1, a, 2a}^{\text{初期}}, \overbrace{3a, 4a, 5a, \dots}^{\text{全追加 (無限個)}})$$

各 p_l は相異なるのだった。なので無限集合となり、

Thm.(再) 除去可能数集合 S が有限集合のとき、 $\mathcal{G}_S$ は周期的。

は使えない。ではその G 数 (列) はどのようなになるだろうか。

mory 数列による無制限二ム

26

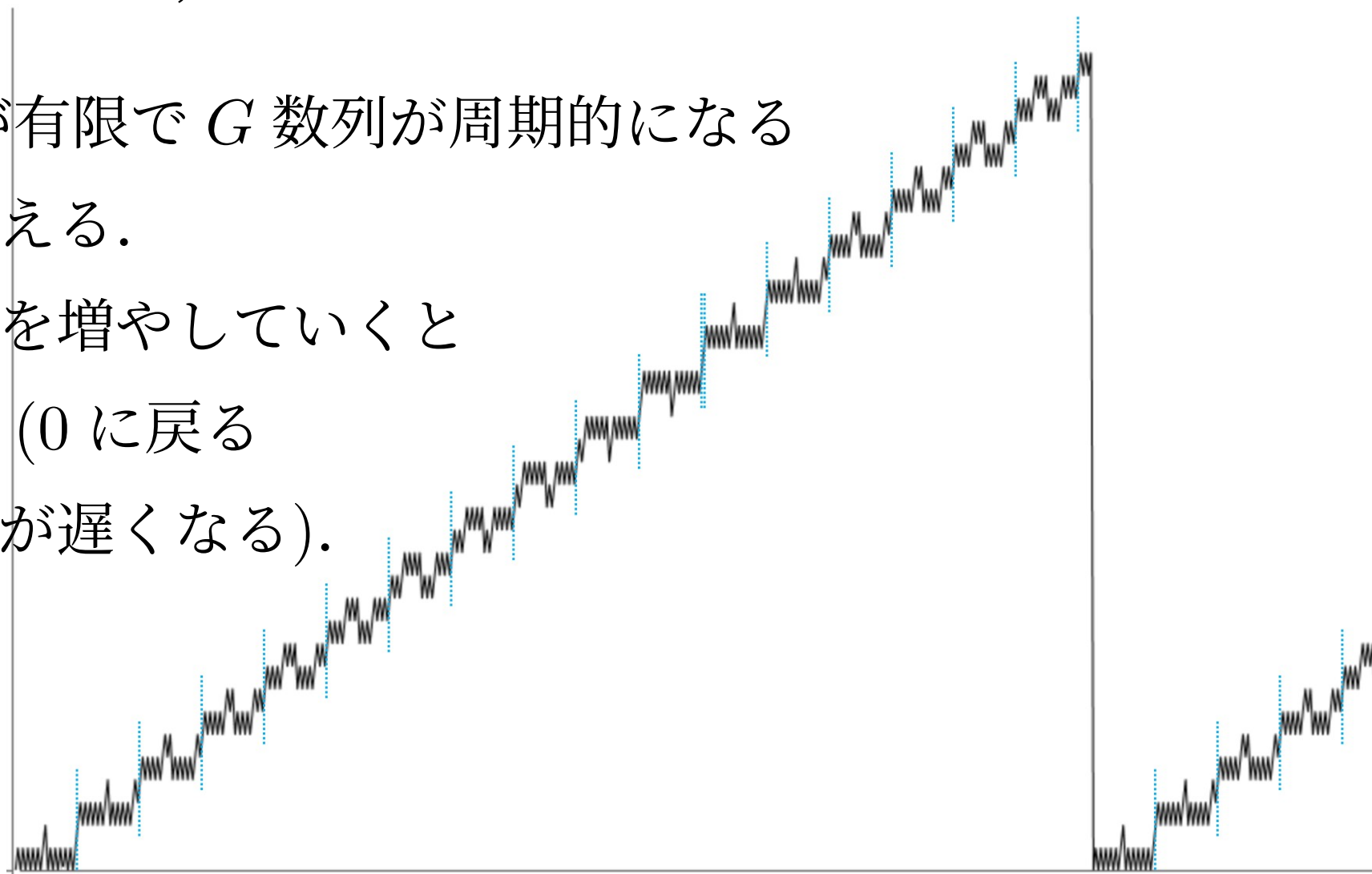
先ほどのグラフで，途中で突然 0 に戻っていた．

それは S が有限で G 数列が周期的になる
からだと言える．

除去可能数を増やしていくと

伸びていく (0 に戻る

タイミングが遅くなる)．



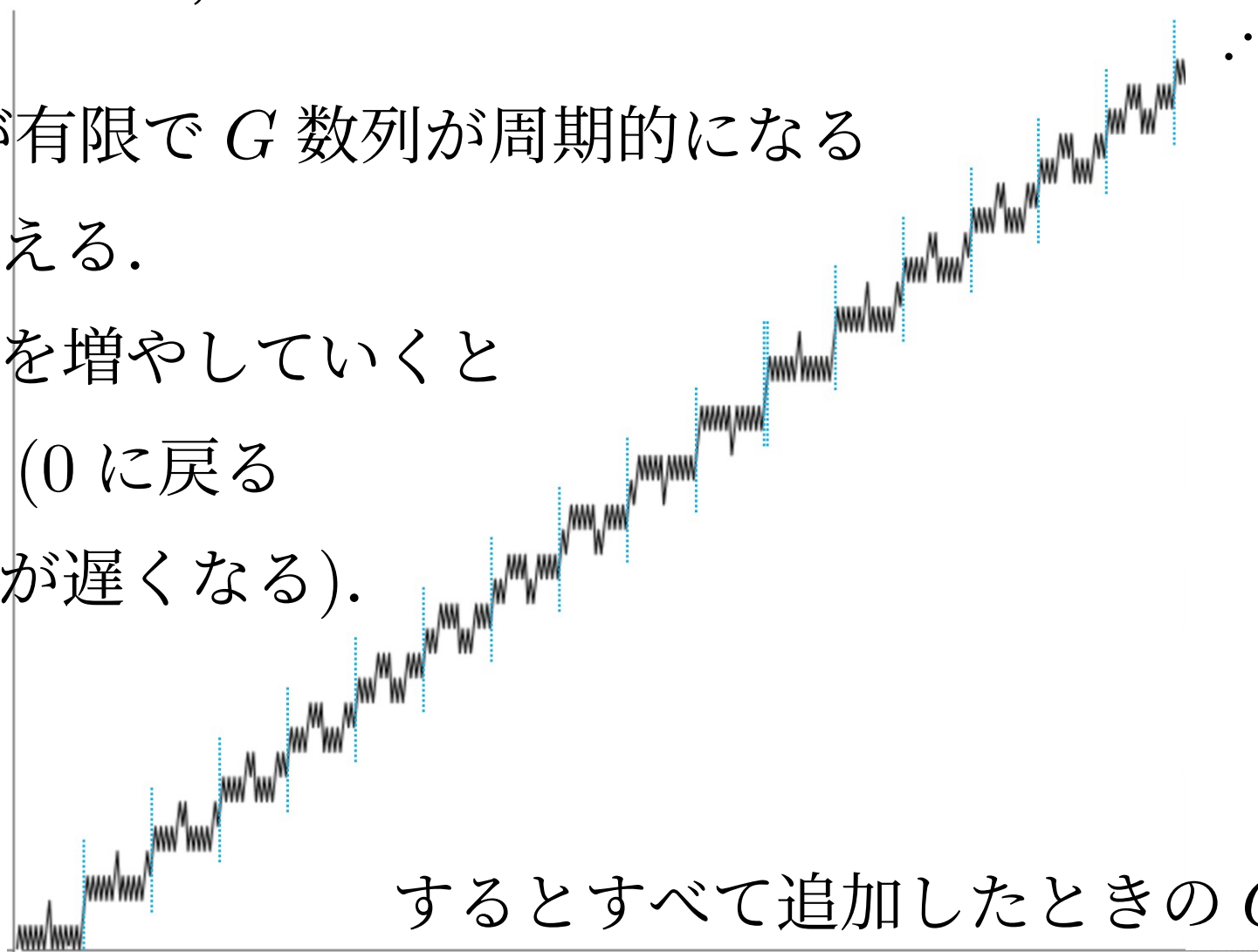
mory 数列による無制限二ム

27

先ほどのグラフで，途中で突然 0 に戻っていた．

それは S が有限で G 数列が周期的になる
からだと言える．

除去可能数を増やしていくと
伸びていく (0 に戻る
タイミングが遅くなる)．



するとすべて追加したときの G 数列は
0 に突然戻ることなくずっと伸びたものになる．

▶ $S \subset \mathbb{N}$ が周期的

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists N \in \mathbb{N} \exists p \in \mathbb{N} \forall n \geq N [n \in S \Leftrightarrow n + p \in S]$$

($\Leftrightarrow S$ の元を小さい順に並べた列が有限 or 加法的周期的).

▶ $[a_l]_{l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が準加法的周期的

* $q_0 = \cdots = q_{p-1}$ なら加法的周期的.
さらにそれらが 0 なら周期的.

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists N \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \exists p \in \mathbb{N} \exists [q_0, q_1, \cdots, q_{p-1}] \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^p$$

$$\forall n \geq N [a_{n+p} = a_n + q_{(n-N) \bmod p}].$$

例. $[1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, \cdots] = [\dot{1}, \dot{1}](+[0, 1]).$

イメージ

p 個ずつまとめると規則的に増えていっているが増え方が場所で異なる
(あるいは増えていない)

Conj. $S \subset \mathbb{N}$ が周期的ならば $\mathcal{G}_S$ は準加法的周期的である.

例 1. $S = \{1, 3, 4\} \sqcup (6 + 4\mathbb{Z}_{\geq 0})$

$$\mathcal{G}_S = [0, 1, 0, 1, \dots, 9, 10, 9, \dot{6}, 7, 3, 8, 11, \textcolor{blue}{12}, 10, \textcolor{blue}{\dot{12}}](+[0, 0, 0, 0, 0, \textcolor{blue}{1}, 0, \textcolor{blue}{1}])$$

例 2. $S = \{1, 4\} \sqcup (\{6, 7\} + 4\mathbb{Z}_{\geq 0})$

$$\mathcal{G}_S = [\dot{0}, 1, 0, 1, 2, 0, \dot{1}](+2) \quad : \text{加法的周期的}$$

例 3. $S = \{2, 3\} \sqcup (4 + 3\mathbb{Z}_{\geq 0})$

$$\mathcal{G}_S = [0, 0, 1, 1, 2, 2, \dot{0}, 3, 1, 4, 2, \dot{5}] \quad : \text{周期的}$$

周期の上限予想 [4] 周期性の証明より $p_S = O(|S|^{\max S})$ だが,
 $p_S \stackrel{?}{=} O((\max S)^{\binom{|S|}{2}})$. このオーダーに迫る例を見つけない。

単調増加でない例 修士論文で扱っていない $\{1, a, b\}$ では

$$\mathbf{p}_{1,4,10} = [11, 7, 34, 35, \dots],$$

$$\mathbf{p}_{1,4,11} = [5, 8, 3, 6, 16, \dots],$$

$$\mathbf{p}_{1,4,13} = [17, 118, 122, 643, 21, 15, 647, \dots]$$

など途中で周期が小さくなることもある。条件など探したい。

mory 数列による無制限制限二つの G 数列

必ず狭義加法的周期的となるだろうか？

効率的に周期を求めるアルゴリズム 現状、実質虱潰し……。

[1] M.D.Ward, A Conjecture about Periods in Subtraction Games, arXiv:1606.04029v1, 2016. $|S| = 3$ での周期の予想

[2] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy, Winning Ways 3, pp.529-532. Folklore Thm.

[3] István Miklós, Logan Post, superpolynomial peroid lengths of the winning positions in the subtraction game, Springer, 2024, pp.27-30. Folklore Thm. において後手必勝かどうかの列で周期を検証

[4] R. J. Nowakowski. Unsolved problems in combinatorial games, Game of No Chance Vol6, 2024. p.3. 未解決問題

[5] 佐藤文広, 石取りゲームの数学: ゲームと代数の不思議な関係, 数学書房, 2014, pp.57-72(第5章). 諸定理の紹介・証明

「いい加減に計算」

32

最上行に 0 と除去可能数

↓

次の行の一番左に未登場の最小値

↓↑

その行の残りはそれ + 真上の除去可能数

⇒ 一番左の列は G 数 0, その右は G 数 1.

他の値は G 数 2 以上だが,

2 と 3 で列が分かれているとは限らない.

0	3	13	16
1	4	14	17
2	5	15	18
6	9	19	22
7	10	20	23
8	11	21	24
12	15	25	28
26	29	39	42
27	30	40	43
31	34	44	47