

Ending Partisan ゲームの 表記に関する提案と いくつかの性質

稲津大貴 広島大学

末續鴻輝 早稲田大学&広島大学

2025年3月15日 第10回広島岡山ゲーム＋代数シンポジウム
@広島大学

Ending Partisanゲーム

- 終了局面の帰結類が $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ のいずれかである.
- 終了局面が複数局面の直和である場合, $\mathcal{R}$ 局面の個数が偶数個であれば $\mathcal{L}$ 局面, 奇数個であれば $\mathcal{R}$ 局面となる. ($\mathcal{L}$ 局面の個数は影響しない)
- Conwayの非不偏ゲームのように局面を表記できないか.

Ending Partisanゲーム

- 終了局面の帰結類が $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ のいずれかである.
 - 終了局面を $*L, *R$ とする.
- 終了局面が複数局面の直和である場合, $\mathcal{R}$ 局面の個数が偶数個であれば $\mathcal{L}$ 局面, 奇数個であれば $\mathcal{R}$ 局面となる. ($\mathcal{L}$ 局面の個数は影響しない)
- Conwayの非不偏ゲームのように局面を表記できないか.

Ending Partisanゲーム

- 終了局面の帰結類が $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ のいずれかである.
 - 終了局面を $*L, *R$ とする.
- 終了局面が複数局面の直和である場合, $\mathcal{R}$ 局面の個数が偶数個であれば $\mathcal{L}$ 局面, 奇数個であれば $\mathcal{R}$ 局面となる. ($\mathcal{L}$ 局面の個数は影響しない)
 - $*L + *L = *L, *L + *R = *R, *R + *L = *R, *R + *R = *L$ という代数規則を導入する.
- Conwayの非不偏ゲームのように局面を表記できないか.

基本的定義

- 定義 1 (局面) .
 - $*L$ と $*R$ は局面である. これらを終了局面という.
 - $G_1, \dots, G_n$ が局面であるとき, $\{G_1, \dots, G_n\}$ も局面である.
- 定義 2 (直和) .
 - $*L + *L \cong *L, *L + *R \cong *R, *R + *L \cong *R, *R + *R \cong *L$ とする.
 - G, H の少なくとも 1 つが終了局面でないとき,
 $G + H \cong \{G_1 + H, \dots, G_n + H, G + H_1, \dots, G + H_m\}$ とする.

+	$*L$	$*R$
$*L$	$*L$	$*R$
$*R$	$*R$	$*L$

基本的定義

- 定義 3 (帰結類) .
 - $*L \in \mathcal{L}, *R \in \mathcal{R}$ とする.
 - 局面 $G \cong \{G_1, \dots, G_n\}$ について,
 - ある G_i が存在して $G_i \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}$ かつ, ある G_j が存在して $G_j \in \mathcal{R} \cup \mathcal{P}$ のとき $G \in \mathcal{N}$
 - ある G_i が存在して $G_i \in \mathcal{L}$ かつ, 任意の G_j について $G_j \in \mathcal{L} \cup \mathcal{N}$ のとき $G \in \mathcal{L}$
 - ある G_i が存在して $G_i \in \mathcal{R}$ かつ, 任意の G_j について $G_j \in \mathcal{R} \cup \mathcal{N}$ のとき $G \in \mathcal{R}$
 - 任意の G_i について $G_i \in \mathcal{N}$ のとき $G \in \mathcal{P}$とする.
- 局面 G の帰結類を $o(G)$ とする.
- 帰結類の半順序関係を $\mathcal{L} > \mathcal{N} > \mathcal{R}, \mathcal{L} > \mathcal{P} > \mathcal{R}, \mathcal{N} \parallel \mathcal{P}$ とする.

基本的定義

- 定義 4 (等価) .
 - 任意の局面 X について, $o(G + X) = o(H + X)$ のとき, かつそのときに限り, $G = H$ と書く.
- 定義 5 (共役)
 - $*\overline{L} \cong *R, *\overline{R} \cong *L$ とする.
 - 任意の局面 $G \cong \{G_1, \dots, G_n\}$ について, $\bar{G} \cong \{\overline{G_1}, \dots, \overline{G_n}\}$ とする.

($*L$ と $*R$ をすべて入れ替えた局面)

性質

- 性質 6.
 - $G + G \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}, G + \bar{G} \in \mathcal{R} \cup \mathcal{P}$ が成り立つ.
- 性質 7.
 - もし $G \cong \bar{G}$ なら, $G + G \in \mathcal{P}$ となる.
- 性質 8.
 - $G + *L \cong G, G + *R \cong \bar{G}$ である. すなわち, $*L$ は単位元となる.

性質

- 性質 9 .
 - $G \in \mathcal{L}$ かつそのときに限り $G + * R \in \mathcal{R}$ である.
 - $G \in \mathcal{R}$ かつそのときに限り $G + * R \in \mathcal{L}$ である.
 - $G \in \mathcal{P}$ かつそのときに限り $G + * R \in \mathcal{P}$ である.
 - $G \in \mathcal{N}$ かつそのときに限り $G + * R \in \mathcal{N}$ である.
- 定理 1 0 .
 - 任意の元 G に対して, $G + G' = * L$ となる元 G' が存在するとは限らない.
 - 例 : $\{ * L, * R \}$.

性質

- $\{*L, *R\} + G' = * \mathcal{L}$ となる G' が存在しないことの証明.
 - 背理法で示す. $\{*L, *R\} + G' \in \mathcal{L}$ となる G' が存在するとして, もっとも誕生日の小さい (ゲーム木の低い) ものを取る.
 - このとき, G' の任意の選択枝 G'' について, 誕生日の最小性から, $\{*L, *R\} + G'' \in \mathcal{N} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{R}$ であり, $\{*L, *R\} + G' \in \mathcal{L}$ から $\{*L, *R\} + G'' \in \mathcal{L} \cup \mathcal{N}$ である. 両者を見て $\{*L, *R\} + G'' \in \mathcal{N}$ が成り立つ.
 - 一方 $\{*L, *R\} + G' \in \mathcal{L}$ なので $\{*L, *R\} + G'$ の少なくとも1つの選択枝は $\mathcal{L}$ に属さなければならない. だが $*L + G' \in \mathcal{L}$ なら $*R + G' \in \mathcal{R}$ であり $*R + G' \in \mathcal{L}$ なら $*L + G' \in \mathcal{R}$ なので $\{*L, *R\} + G'$ の少なくとも1つの選択枝が $\mathcal{R}$ に属すことになり矛盾する.

性質

- 定義 1 1 (半順序) .
 - 任意の X に対して $o(G + X) \geq o(H + X)$ のとき, $G \geq H$ とする.
 - 任意の X に対して $o(G + X) \leq o(H + X)$ のとき, $G \leq H$ とする.
 - $G \geq H$ かつ $G \leq H$ のとき, $G = H$ となる.
 - $G \geq H$ かつ $G \leq H$ でないとき, $G > H$ とする.
 - $G \geq H$ でなく、かつ $G \leq H$ のとき, $G < H$ とする.
 - $G \geq H$ でなく、かつ $G \leq H$ でないとき, $G \parallel H$ とする.
- 性質 1 2 .
 - 任意の G において, $G > H$ となるような H は存在しない.
 - つまり, 任意の G, H に対して, $G = H$ または $G \parallel H$ のみが成り立つ.

性質

- 性質 1 2 の証明
 - $o(G + X) > o(H + X)$ を仮定する.
 - $G + X \in \mathcal{L}, H + X \in \mathcal{N} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{R}$ のとき, $X' \cong X + * R$ とすると, $G + X' \in \mathcal{R}, H + X' \in \mathcal{N} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ なので $o(G + X') < o(H + X')$ である.
 - $G + X \in \mathcal{N} \cup \mathcal{P}, H + X \in \mathcal{R}$ のとき, $X' \cong X + * R$ とすると, $G + X' \in \mathcal{N} \cup \mathcal{P}, H + X' \in \mathcal{L}$ なので $o(G + X') < o(H + X')$ である.
- したがって, $o(G + X) > o(H + X)$ のときある X' が存在して $o(G + X') < o(H + X')$ となるので, $G > H$ が成立することはない.

性質

- 定義 1 3 .
 - $*L_0 \cong *L, *L_n \cong \{ *L_{n-1}, \dots, *L_0 \}$ とする. また $*R_0 \cong *R, *R_n \cong \{ *R_{n-1}, \dots, *R_0 \}$ とする.
- 定理 1 4 .
 - $G \cong \{ *L_{a_1}, \dots, *L_{a_\ell} \}$ とする. $m = \text{mex}(\{a_1, \dots, a_\ell\})$ のとき, $G = *L_m$ となる.
- 系 1 5 .
 - $*L_{a_1} + *L_{a_2} = *L_{a_1 \oplus a_2}$
 - $*L_{a_1} + *R_{a_2} = *R_{a_1 \oplus a_2}$
 - $*R_{a_1} + *R_{a_2} = *L_{a_1 \oplus a_2}$

性質

- 定義 1 6 .

- $\ast n \cong \{\ast L_{n-1}, \ast R_{n-1}, \dots, \ast L_0, \ast R_0\}$ とする .

- 定理 1 7 .

- $G = \ast a_1 + \dots + \ast a_n + \ast L_{b_1} + \dots + \ast L_{b_\ell} + \ast R_{c_1} + \dots + \ast R_{c_r}, a_1 \leq \dots \leq a_n$ とする . このとき次が成り立つ .

$$o(G) = \begin{cases} \mathcal{L} (n = 0, r \text{ が偶数のとき}) \\ \mathcal{R} (n = 0, r \text{ が奇数のとき}) \\ \mathcal{N} (n = 1 \text{ のとき}) \\ \mathcal{N} (n \geq 2, a_3 \oplus \dots \oplus a_n \oplus b_1 \oplus \dots \oplus b_\ell \oplus c_1 \oplus \dots \oplus c_r \neq 0 \text{ のとき}) \\ \mathcal{P} (n \geq 2, a_3 \oplus \dots \oplus a_n \oplus b_1 \oplus \dots \oplus b_\ell \oplus c_1 \oplus \dots \oplus c_r = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

性質

- 定義 1 8 .
 - $*' 1 \cong \{ * L_0, * R_0 \}, *' n \cong \{ *' (n - 1), \dots, *' 1, * L_0, * R_0 \}$ とする.
- 定理 1 9 .
 - $*' a_1 + \dots + *' a_n \in \mathcal{P} \Leftrightarrow a_1 \oplus \dots \oplus a_n = 0$ となる.
- 定理 2 0 .
 - $*' a + *' b + * L_c \in P \Leftrightarrow (a - 1) \oplus (b - 1) \oplus c = 0$