

除去可能数集合が対称な Ending Partizan Subtraction Nim

和田遥樹

広島大学 修士1年

イントロダクション

- ・ Ending Partizan Subtraction Nimという種類のNimでは、多くの除去可能数集合 S において、ある個数以上の石があるとき、常に $\mathcal{L}$ 局面となる。（実験により、 S の最小元が3、最大元が21以下のとき、約93%もの S についてこの現象が起こることが分かっている。[Inoue 2025]）
- ・ 本発表では、 S が対称な場合上の現象は起こらず、また、帰結類の列の周期が直ちに分かることを証明する。

発表の流れ

① 準備

- ・ 除去可能数集合が対称であることの定義
- ・ 正規形不偏のSubtraction Nimにおいて知られている結果

② Ending Partizan Subtraction Nimの場合

- ・ Ending Partizan Subtraction Nimの定義
- ・ 主定理

①準備

定義 (対称、 p -対称)

Subtraction Nimの除去可能数集合 S が**対称**(symmetric)とは、ある $p \in \mathbb{N}$ が存在して、

$$\forall s \in S, p - s \in S$$

が成立することと定める。

また、この p を用いて p -**対称**と呼ぶこともある。

定義 (対称、 p -対称)

Subtraction Nimの除去可能数集合 S が**対称**(symmetric)とは、ある $p \in \mathbb{N}$ が存在して、

$$\forall s \in S, p - s \in S$$

が成立することと定める。

また、この p を用いて p -**対称**と呼ぶこともある。

例

- $S = \{1, 2, 3\}$ は4-対称。
- $S = \{2, 3\}$ は5対称。
- $S = \{1, 2, 3, 5\}$ は対称でない。
- S が無限集合のとき、対称でない。

正規形不偏のSubtraction Nimにおいて次の結果が知られている。

正規形不偏のSubtraction Nimにおいて次の結果が知られている。

定理

正規形不偏のSubtraction Nimの除去可能数集合 S が p -対称ならば、このSubtraction NimのGrundy数列 $\{g_S(m)\}_{m=0}^{\infty}$ は純周期 p を持つ。

正規形不偏のSubtraction Nimにおいて次の結果が知られている。

定理

正規形不偏のSubtraction Nimの除去可能数集合 S が p -対称ならば、このSubtraction NimのGrundy数列 $\{g_S(m)\}_{m=0}^{\infty}$ は純周期 p を持つ。

注意・最小周期とは限らない。
・逆は成り立たない。

定義 (周期)

列 $\{f(n)\}_{n=0}^{\infty}$ が **周期** p を持つとは、
$$\exists n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, f(n) = f(n+p)$$

が成立することをいう。 $n_0 = 0$ のとき、この周期を**純周期**と呼ぶ。

例

・ $S = \{1, 2\}$ は3-対称。よってGrundy数列は純周期3を持つ。

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$g_S(m)$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	



例

・ $S = \{1, 2\}$ は3-対称。よってGrundy数列は純周期3を持つ。

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$g_S(m)$	0	1	2	0	1	2	0	1	2	



・ $S = \{1, 3, 6, 8\}$ は9-対称。よってGrundy数列は純周期9を持つ。

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$g_S(m)$	0	1	0	1	0	1	2	3	2	0	1	0	1	0	1	2	3	2



...

②Ending Partizan Subtraction Nimの場合

定義 (Ending Partizan Subtraction Nim、[Inoue 2025])

$S \subset \mathbb{Z}_{\geq 2}$ とする。次のルールで定まる1山ニムを **Ending Partizan Subtraction Nim** という。

- Left と Right は交互に $s \in S$ 個の石を取る。
- 終了局面になったときに、
 - 石が偶数個残っていたら Left の勝ち
 - 石が奇数個残っていたら Right の勝ち

例・ $S = \{2, 3\}$ 、石7個で開始、Left が先攻の場合

7 $\xrightarrow[\text{2個取る}]{\text{Left}}$ 5 $\xrightarrow[\text{3個取る}]{\text{Right}}$ 2 $\xrightarrow[\text{2個取る}]{\text{Left}}$ 0

石が0個（偶数個）残っているので Left の勝ち

定義（帰結類）

G をゲームの局面とする。帰結類 $\mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}$ を次で定める。

- $G \in \mathcal{N} \stackrel{\text{def}}{\iff} G$ は先手必勝局面
- $G \in \mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{\iff} G$ は後手必勝局面
- $G \in \mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{\iff} G$ は先手でも後手でも Left 必勝
- $G \in \mathcal{R} \stackrel{\text{def}}{\iff} G$ は先手でも後手でも Right 必勝

また、 $\mathcal{N}$ に属する局面を $\mathcal{N}$ 局面などと呼ぶこともある。他も同様。

以下、「除去可能数集合が S の Ending Partizan Subtraction Nim の石が m 個の局面の帰結類」を $\mathcal{O}_S(m)$ と書く。

例

- $S = \{2, 3\}$ のとき

[illegible]

例

・ $S = \{2, 3\}$ のとき

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathcal{O}_S(m)$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{R}$											

▶ 石が0個、1個のとき終了局面なので、ルールより $\mathcal{L}$ 、 $\mathcal{R}$ 。

例

・ $S = \{2, 3\}$ のとき

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathcal{O}_S(m)$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{L}$										

- ▶ 石が0個、1個のとき終了局面なので、ルールより $\mathcal{L}$ 、 $\mathcal{R}$ 。
- ▶ 石が2個のとき、Leftは $\mathcal{L}$ に着手でき、Rightには勝てる着手がない。

例

・ $S = \{2, 3\}$ のとき

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathcal{O}_S(m)$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{N}$									

- ▶ 石が0個、1個のとき終了局面なので、ルールより $\mathcal{L}$ 、 $\mathcal{R}$ 。
- ▶ 石が2個のとき、Leftは $\mathcal{L}$ に着手でき、Rightには勝てる着手がない。
- ▶ 石が3個のとき、Leftは $\mathcal{L}$ に着手でき、Rightは $\mathcal{R}$ に着手できる。

例

・ $S = \{2, 3\}$ のとき

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$\mathcal{O}_S(m)$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{L}$	

- ▶ 石が0個、1個のとき終了局面なので、ルールより $\mathcal{L}$ 、 $\mathcal{R}$ 。
- ▶ 石が2個のとき、Leftは $\mathcal{L}$ に着手でき、Rightには勝てる着手がない。
- ▶ 石が3個のとき、Leftは $\mathcal{L}$ に着手でき、Rightは $\mathcal{R}$ に着手できる。

⋮

例

・ $S = \{2, 3\}$ のとき

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$\mathcal{O}_S(m)$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{L}$	

- ▶ 石が0個、1個のとき終了局面なので、ルールより $\mathcal{L}$ 、 $\mathcal{R}$ 。
- ▶ 石が2個のとき、Leftは $\mathcal{L}$ に着手でき、Rightは着手できない。
- ▶ 石が3個のとき、Leftは $\mathcal{L}$ に着手でき、Rightは $\mathcal{R}$ に着手できる。

⋮

次の定理を証明した。

次の定理を証明した。

主定理

Ending Partizan Subtraction Nimの除去可能数集合 S が p -対称ならば、帰結類の列 $\{\mathcal{O}_S(m)\}_{m=0}^{\infty}$ は周期 p を持つ。

注意・最小周期とも純周期とも限らない。

・逆は成り立たない。

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$\mathcal{O}_S(m)$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{L}$	



主定理の証明には次の補題を用いる。

主定理の証明には次の補題を用いる。

補題

$\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。除去可能数集合 S が p -対称な Ending Partizan Subtraction Nim について、次が成り立つ。

- $\mathcal{O}_S(\ell) = \mathcal{P}$ ならば $\mathcal{O}_S(\ell + p) = \mathcal{P}$
- $\mathcal{O}_S(\ell) = \mathcal{L}$ ならば $\mathcal{O}_S(\ell + p) \in \{\mathcal{P}, \mathcal{L}\}$ (つまり Left が後手で勝てる)
- $\mathcal{O}_S(\ell) = \mathcal{R}$ ならば $\mathcal{O}_S(\ell + p) \in \{\mathcal{P}, \mathcal{R}\}$ (つまり Right が後手で勝てる)

主定理の証明には次の補題を用いる。

補題

$\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする。除去可能数集合 S が p -対称な Ending Partizan Subtraction Nim について、次が成り立つ。

- $\mathcal{O}_S(\ell) = \mathcal{P}$ ならば $\mathcal{O}_S(\ell + p) = \mathcal{P}$
- $\mathcal{O}_S(\ell) = \mathcal{L}$ ならば $\mathcal{O}_S(\ell + p) \in \{\mathcal{P}, \mathcal{L}\}$ (つまり Left が後手で勝てる)
- $\mathcal{O}_S(\ell) = \mathcal{R}$ ならば $\mathcal{O}_S(\ell + p) \in \{\mathcal{P}, \mathcal{R}\}$ (つまり Right が後手で勝てる)

[補題の証明]

- $\mathcal{O}_S(\ell) = \mathcal{P}$ のとき、石が $\ell + p$ 個の局面において先手が $s \in S$ 個取ったとき、後手は $p - s$ 個取って石が ℓ 個の局面にして勝てる。
(p -対称の定義から $p - s \in S$)

[補題の証明続き]

・ $\mathcal{O}_S(\ell) = \mathcal{L}$ のとき

$\mathcal{O}_S(\ell + p) \in \{\mathcal{P}, \mathcal{L}\}$ すなわち「石が $\ell + p$ 個の局面はLeftが後手で勝てることを示せばよい。

右が先手で $s \in S$ 個取ったとすると、左は $p - s$ 個取ることで ℓ 個の局面にして勝てる。

$\mathcal{O}_S(\ell) = \mathcal{R}$ のときも同様。

[補題の証明終わり]

主定理

Ending Partizan Subtraction Nimの除去可能数集合 S が p -対称ならば、帰結類の列 $\{\mathcal{O}_S(m)\}_{m=0}^{\infty}$ は周期 p を持つ。

[証明]

主定理

Ending Partizan Subtraction Nimの除去可能数集合 S が p -対称ならば、帰結類の列 $\{\mathcal{O}_S(m)\}_{m=0}^{\infty}$ は周期 p を持つ。

[証明]

$\ell \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ を任意に取り、固定する。次を示す。

示：列 $\{\mathcal{O}_S(\ell), \mathcal{O}_S(\ell+p), \mathcal{O}_S(\ell+2p), \dots\}$ において、ある番号より先は同じ要素が続く。

主定理

Ending Partizan Subtraction Nimの除去可能数集合 S が p -対称ならば、帰結類の列 $\{\mathcal{O}_S(m)\}_{m=0}^{\infty}$ は周期 p を持つ。

[証明]

$\ell \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ を任意に取り、固定する。次を示す。

示：列 $\{\mathcal{O}_S(\ell), \mathcal{O}_S(\ell+p), \mathcal{O}_S(\ell+2p), \dots\}$ において、ある番号より先は同じ要素が続く。

列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $a_n = \mathcal{O}_S(\ell + np)$ とおく。番号 k が存在して、 $a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = \dots$ となることを示せばよい。

主定理

Ending Partizan Subtraction Nimの除去可能数集合 S が p -対称ならば、帰結類の列 $\{\mathcal{O}_S(m)\}_{m=0}^{\infty}$ は周期 p を持つ。

[証明]

$\ell \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ を任意に取り、固定する。次を示す。

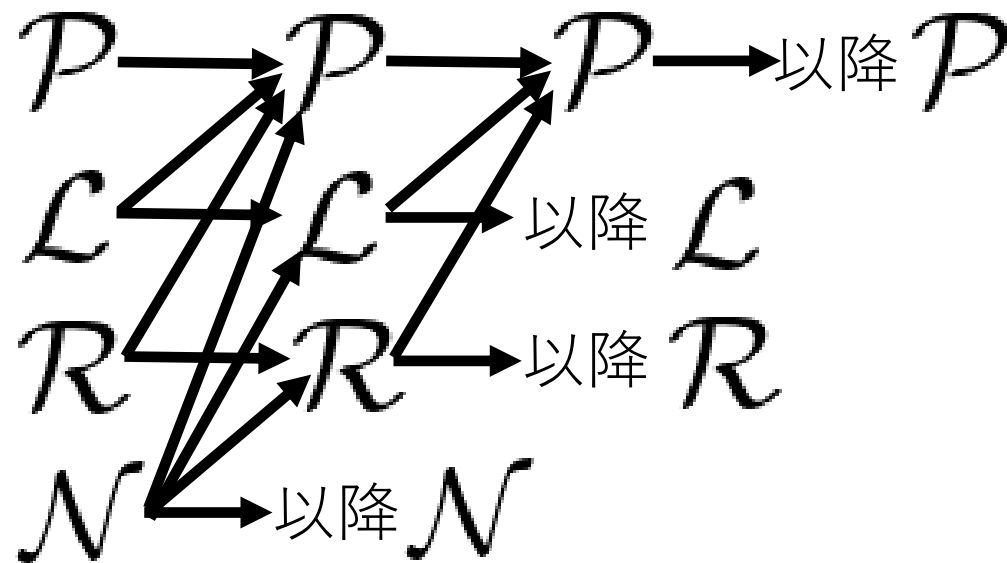
示：列 $\{\mathcal{O}_S(\ell), \mathcal{O}_S(\ell+p), \mathcal{O}_S(\ell+2p), \dots\}$ において、ある番号より先は同じ要素が続く。

列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を $a_n = \mathcal{O}_S(\ell + np)$ とおく。番号 k が存在して、 $a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = \dots$ となることを示せばよい。

補題は次のように言い換えられる。

補題の言い換え

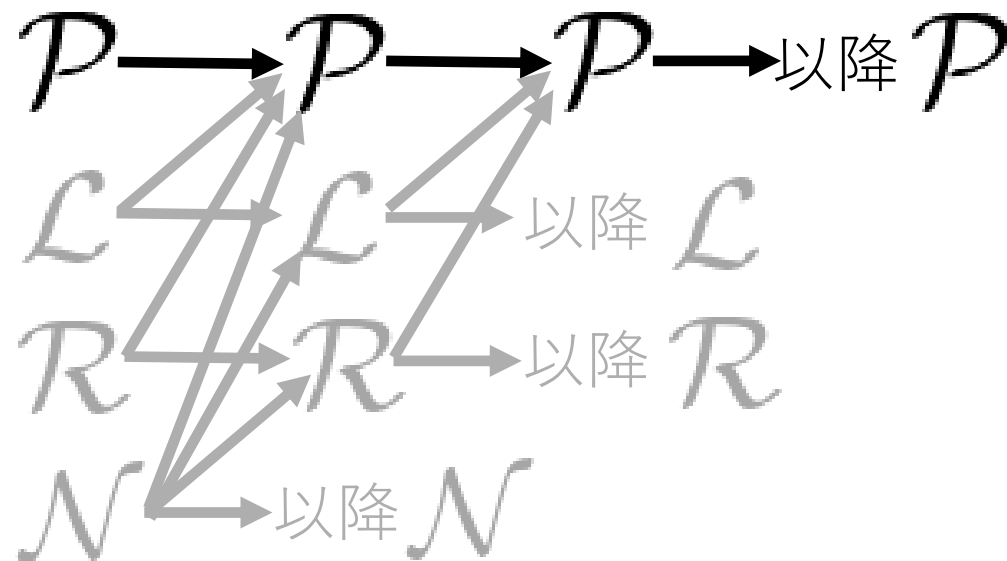
- $a_n = \mathcal{P}$ ならば $a_{n+1} = \mathcal{P}$
- $a_n = \mathcal{L}$ ならば $a_{n+1} \in \{\mathcal{P}, \mathcal{L}\}$
- $a_n = \mathcal{R}$ ならば $a_{n+1} \in \{\mathcal{P}, \mathcal{R}\}$



補題の言い換え

- $a_n = \mathcal{P}$ ならば $a_{n+1} = \mathcal{P}$
- $a_n = \mathcal{L}$ ならば $a_{n+1} \in \{\mathcal{P}, \mathcal{L}\}$
- $a_n = \mathcal{R}$ ならば $a_{n+1} \in \{\mathcal{P}, \mathcal{R}\}$

(i) $a_k = \mathcal{P} (\exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ のとき、
補題より $a_{k+1} = \mathcal{P}$ 、よって
補題より $a_{k+2} = \mathcal{P}$ 、 $\dots$ と続けることができる。



補題の言い換え

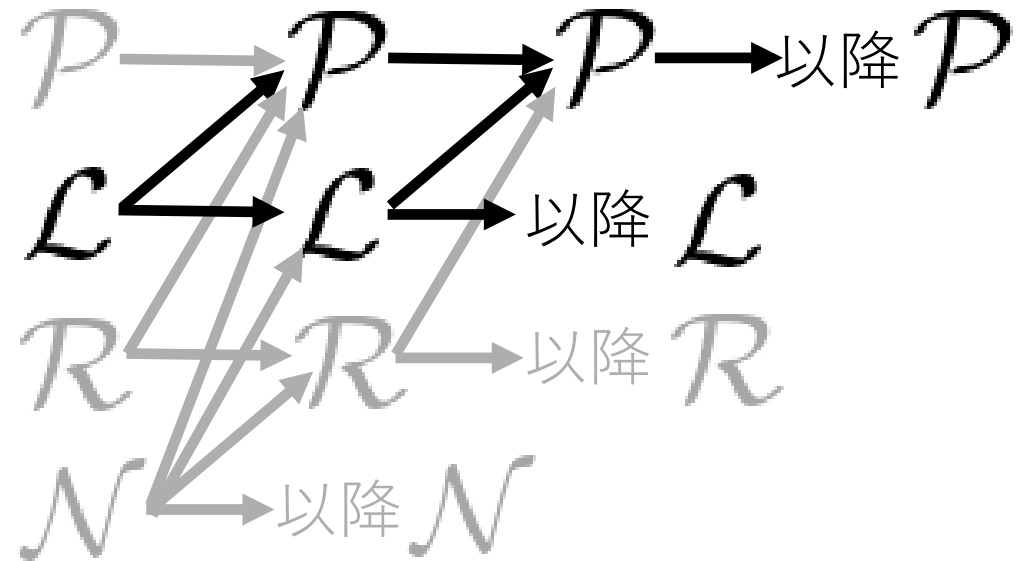
- $a_n = \mathcal{P}$ ならば $a_{n+1} = \mathcal{P}$
- $a_n = \mathcal{L}$ ならば $a_{n+1} \in \{\mathcal{P}, \mathcal{L}\}$
- $a_n = \mathcal{R}$ ならば $a_{n+1} \in \{\mathcal{P}, \mathcal{R}\}$

(i) $a_k = \mathcal{P} (\exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ のとき、

補題より $a_{k+1} = \mathcal{P}$ 、よって

補題より $a_{k+2} = \mathcal{P}$ 、 $\dots$ と続けることができる。

(ii) $a_k = \mathcal{L} (\exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ のとき、それ以降ずっと $\mathcal{L}$ が続くか、あるいはどこかで $\mathcal{P}$ になり、(i) に帰着されるかのどちらかが成り立つ。



補題の言い換え

- $a_n = \mathcal{P}$ ならば $a_{n+1} = \mathcal{P}$
- $a_n = \mathcal{L}$ ならば $a_{n+1} \in \{\mathcal{P}, \mathcal{L}\}$
- $a_n = \mathcal{R}$ ならば $a_{n+1} \in \{\mathcal{P}, \mathcal{R}\}$

(i) $a_k = \mathcal{P} (\exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ のとき、

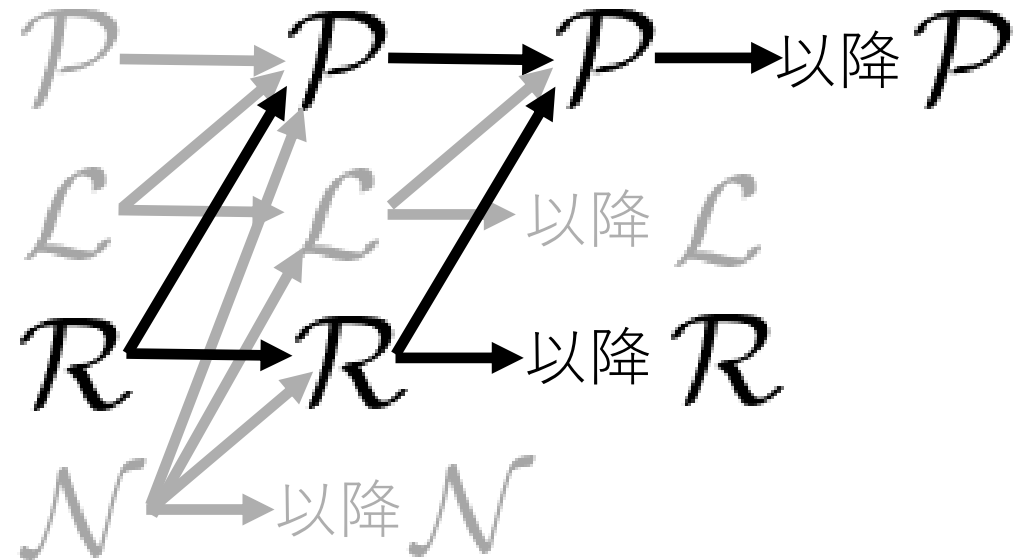
補題より $a_{k+1} = \mathcal{P}$ 、よって

補題より $a_{k+2} = \mathcal{P}$ 、 $\dots$ と続けることができる。

(ii) $a_k = \mathcal{L} (\exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ のとき、それ以降ずっと $\mathcal{L}$ が続くか、あるいは

どこかで $\mathcal{P}$ になり、(i) に帰着されるかのどちらかが成り立つ。

(iii) $a_k = \mathcal{R} (\exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ のとき、(ii) と同様。



補題の言い換え

- $a_n = \mathcal{P}$ ならば $a_{n+1} = \mathcal{P}$
- $a_n = \mathcal{L}$ ならば $a_{n+1} \in \{\mathcal{P}, \mathcal{L}\}$
- $a_n = \mathcal{R}$ ならば $a_{n+1} \in \{\mathcal{P}, \mathcal{R}\}$

(i) $a_k = \mathcal{P} (\exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ のとき、

補題より $a_{k+1} = \mathcal{P}$ 、よって

補題より $a_{k+2} = \mathcal{P}$ 、 $\dots$ と続けることができる。

(ii) $a_k = \mathcal{L} (\exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ のとき、それ以降ずっと $\mathcal{L}$ が続くか、あるいは

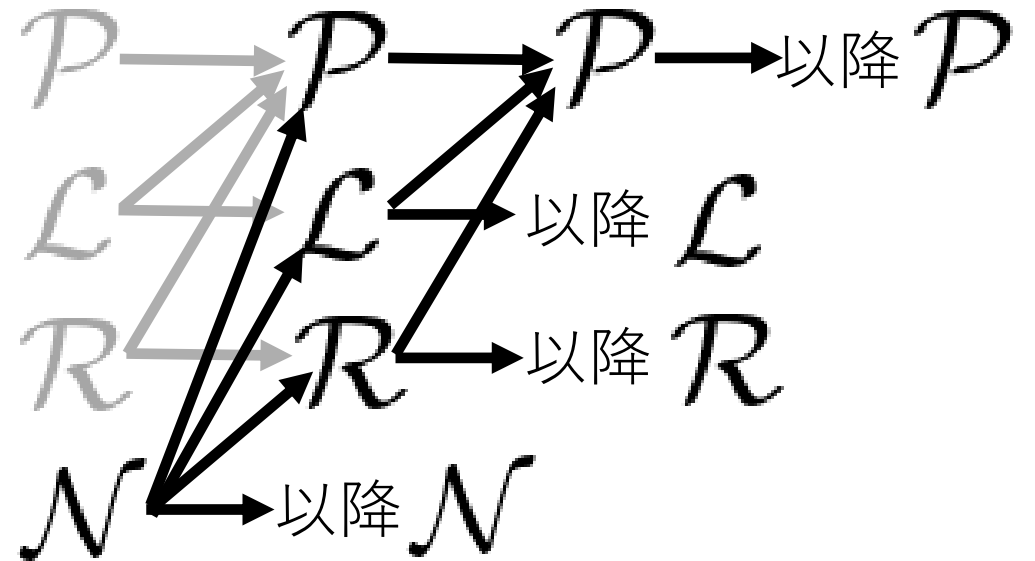
どこかで $\mathcal{P}$ になり、(i) に帰着されるかのどちらかが成り立つ。

(iii) $a_k = \mathcal{R} (\exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ のとき、(ii) と同様。

(iv) $a_k = \mathcal{N} (\exists k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ のとき、それ以降ずっと $\mathcal{N}$ が続くか、あるいは

どこかで $\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}$ になり、(i), (ii), (iii) に帰着される。

□



一般には純周期とは限らないが、純周期となるような例は存在する。

一般には純周期とは限らないが、純周期となるような例は存在する。

例

- ・ S が偶数のみからなる場合

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$\mathcal{O}_S(m)$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{L}$	

- ・ $S = \{2, k\}$ (ただし、 k は**5以上の奇数**)

m	0	1	2	3	...	$k-1$	k	$k+1$	$k+2$	$k+3$	$k+4$	$k+5$	...	$2k+1$	$2k+2$	$2k+3$	...
$\mathcal{O}_S(m)$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{R}$	...	$\mathcal{L}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{R}$	...	$\mathcal{L}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{N}$	

井上博裕氏によって、主定理に関連する次の予想が提示された。

井上博裕氏によって、主定理に関連する次の予想が提示された。

予想

Ending Partizan Subtraction Nimの除去可能数集合 S が p -対称ならば、帰結類の列 $\{\mathcal{O}_S(m)\}_{m=0}^{\infty}$ の周期の始まり m_0 は、 $\min(S)$ 以下である。すなわち、

$0 \leq \exists m_0 \leq \min S, \text{ s.t. } \forall m \geq m_0, \mathcal{O}_S(m) = \mathcal{O}_S(m + p)$
が成立する。

注意 主定理により、周期 p を持つことは分かっている。

次の系が主定理から導かれる。

次の系が主定理から導かれる。

系

除去可能数集合 S が p -対称な Ending Partizan Subtraction Nim の帰結類の列 $\mathcal{O}_S(m)$ において、「ある番号より先が全て $\mathcal{L}$ になる」という現象は起こらない。

[証明]

次の系が主定理から導かれる。

系

除去可能数集合 S が p -対称な Ending Partizan Subtraction Nim の帰結類の列 $\mathcal{O}_S(m)$ において、「ある番号より先が全て $\mathcal{L}$ になる」という現象は起こらない。

[証明]

ルールより $\mathcal{O}_S(1) = \mathcal{R}$ であるので、主定理の証明より、列 $\{\mathcal{O}_S(1), \mathcal{O}_S(1+p), \mathcal{O}_S(1+2p), \dots\}$ には $\mathcal{R}$ か $\mathcal{P}$ しか現れない。



参考文献

[Inoue 2025] 井上博裕, Ending Partizan Subtraction Nimについて, 卒業論文, 広島大学理学部, 2025

ご静聴ありがとうございました

定義

Subtraction Nimの除去可能数集合 S' が**本質的に** p -対称

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists S: p\text{-対称な除去可能数集合、}$

$\exists s'_1, s'_2, \dots: s'_i \bmod p \in S \ (\forall i) \text{ を満たす非負整数}$

s.t. $S' = S \cup \{s'_1, s'_2, \dots\}$

注意 $s'_1, s'_2, \dots$ は有限個でもよい。0個でもよい。

定理

S, S' が上の状況を満たすとき、

- ・ 正規形不偏のGrundy数列について $g_S = g_{S'}$
- ・ Ending Partizanの帰結類の列について $\mathcal{O}_S = \mathcal{O}_{S'}$

が成立する。

系

除去可能数集合 S' が本質的に p -対称な Ending Partizan Subtraction Nim の帰結類の列 $\{\mathcal{O}_{S'}(m)\}_{m=0}^{\infty}$ は周期 p を持つ。
さらに、対称のときと同様に「ある番号以降 $\mathcal{L}$ が続く」という現象は起こらない。

$\min S = 3, \max S \leq 21$ なる S は 262144 個あり、そのうち「ある番号以降 $\mathcal{L}$ が続く」現象が起こるものは 243951 個、起こらないものは 18193 個。[Inoue 2025]

このうち対称なものは 1534 個（18193 個の約 8.4%）、本質的に対称なものは 2476 個（18193 個の約 13.6%）。（プログラムを組んで数えた）