Collatz 予想に現れる自己再帰的な波

城村敦、**渡辺業**

広島大学

2025/3/16

第10回広島岡山代数+ゲームシンポジウム

Collatz予想とはなにか？

次のような操作を考える：

自然数 n

$n/2$ (nが偶数)

$(3n+1)/2$ (nが奇数)

Collatz予想

全ての自然数は,この操作を繰り返し行うと有限回で $1 \to 2 \to 1 \to 2 \to 1 \to \cdots$ というサイクルにたどり着く

具体的にいくつか計算してみる

9 から始めると

$$9 \to 14 \to 7 \to 11 \to 17 \to 26 \to 13 \to 20$$
$$\to 10 \to 5 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 \to 2 \to 1 \to \cdots$$

25 から始めると

$$25 \to 38 \to 19 \to 29 \to 44 \to 22 \to 11$$
$$\to 17 \to 26 \to 13 \to 20 \to 10 \to 5 \to 8 \to 4$$
$$\to 2 \to 1 \to 2 \to 1 \to \cdots$$

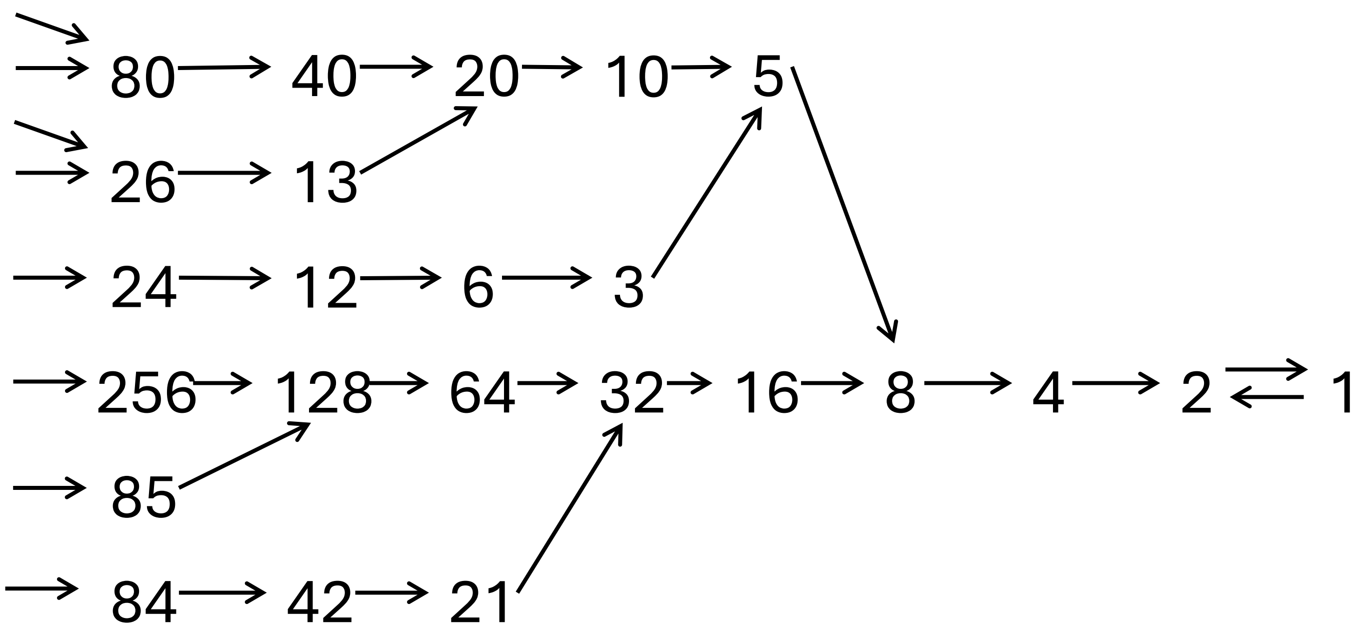
27から始めると

$$27 \to 41 \to 62 \to 31 \to 47 \to 71 \to 107 \to 161$$
$$\to 242 \to 121 \to 182 \to 91 \to 137 \to 206 \to 103$$
$$\to 155 \to 233 \to 350 \to 175 \to 263 \to 395 \to 593$$
$$\to 890 \to 445 \to 668 \to 334 \to 167 \to 251 \to 377$$
$$\to 566 \to 283 \to 425 \to 638 \to 319 \to 479 \to 719$$
$$\to 1079 \to 1619 \to 2429 \to 3644 \to 1822 \to 911$$
$$\to 1367 \to 2051 \to 3077 \to 4616 \to 2308 \to 1154$$
$$\to 577 \to 866 \to 433 \to 650 \to 325 \to 488 \to 244$$
$$\to 122 \to 61 \to 92 \to 46 \to 23 \to 35 \to 53 \to 80$$
$$\to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 \to 2 \to 1$$
$$\to \cdots$$

1にたどり着くまで70回もかかる！

Collatz予想の簡単な歴史

- Lothar Collatz(ドイツの数学者)は, 1930年代に大学院生だったとき, 関数による移り変わりのグラフ表現に興味を持っており, その一例としてこの問題を考えました.

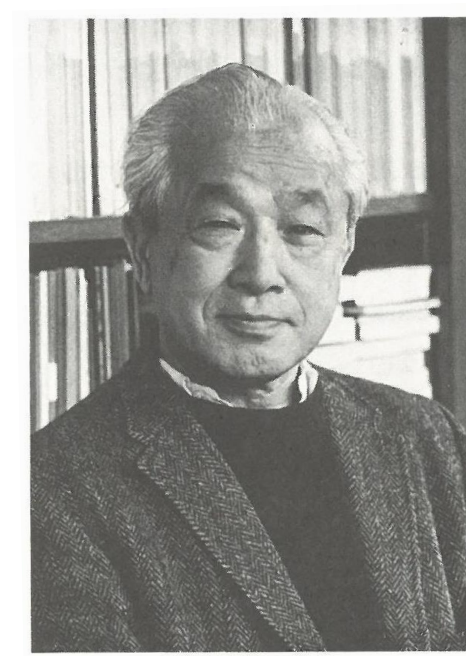


Collatz 操作のグラフ表現

Collatz予想の簡単な歴史

- それから20年後, Collatz は1950年にケンブリッジで行われた国際数学者会議で, 色々な人にこの問題を聞いて回ったらしく, そこから知られるようになりました.

- Collatz予想は角谷静夫の名前を冠して「角谷問題」とも呼ばれています。
- 彼がシカゴ大学を訪れこの問題を話したとき, 全ての数学者が夢中になり, この問題を証明しようとして1カ月も本来の研究がストップしたとか……



角谷静夫
(1911-2004)

Collatz予想の簡単な歴史

- Conway はCollatz予想が**“証明出来ない問題”**かも知れないということを考え, Collatz予想の操作に似た**“FRACTRAN”**というプログラミング言語を考えました.

$$\frac{5}{7}, \frac{5}{6}, \frac{3}{10}, \frac{7}{2}$$

入力された値が偶数か奇数かを判定するFRACTRANのコード.

- いくつか懸賞金が懸けられており, 日本の企業も1億2千万円の懸賞金をかけています. NHKでも特集されたことがあり, そのせいか近年では日本でも割と有名になってきていると感じています.

$5n+1$問題だと?

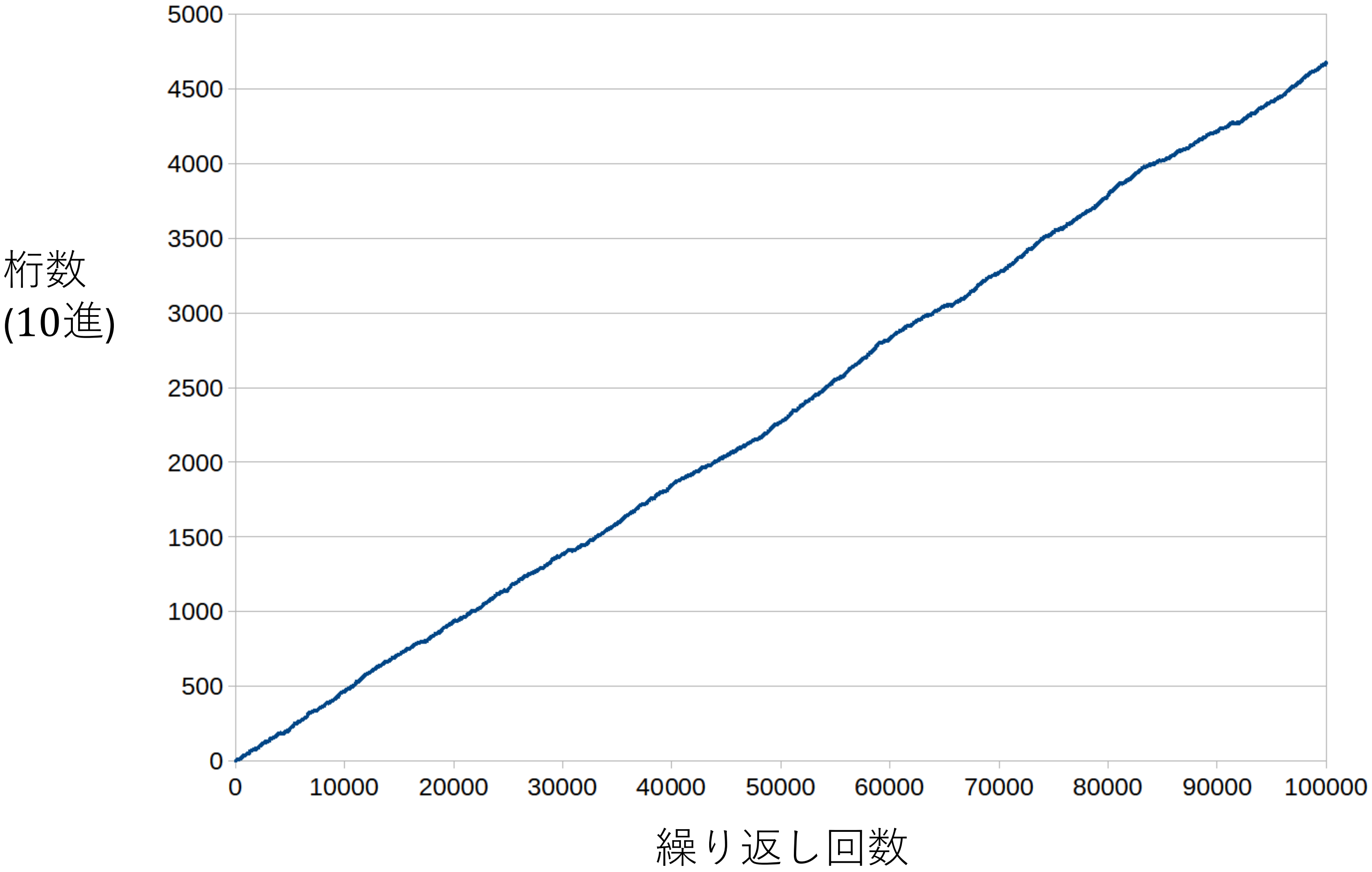
nが奇数のとき, $(3n+1)/2$に移すかわりに
$(5n+1)/2$ に移すとどうなるのか？

この場合は, **ほとんど全ての数がサイクルに入らず大きくなり続ける**ことが確率的に証明されている.

ただし, どの値がサイクルに入らず大きくなり続けるのか, **具体的な値は分かっていない**.

$5n + 1$ 問題だと?

7から始めた場合:



$3n+q$ 問題

より一般に, 奇数qを用意して次の操作を考える:
自然数 n について
n が 偶数ならば, $n/2$に移す,
n が 奇数ならば, $(3n+q)/2$に移す.

$3n+q$ 予想

全ての自然数は,この操作を繰り返し行うと有限回で何かのサイクルにたどり着く

$3n+1$ 予想は **弱い** Collatz予想だといえる.
もしかしたら1を含まないサイクルにたどり着くかもしれないため. ただし, そんなことは多分起こらない.

$3n+q$ 問題

$q=1$ (Collatz予想)のとき,

$$3\to5\to8\to4\to2\to1\to2\to\cdots.$$

$\times 5$ $\quad$ $\times -1$

$q=5$のとき,

$$15\to25\to40\to20\to10\to5\to10\to\cdots.$$

$q=-1$のとき,

$$-3\to-5\to-8\to-4\to-2\to-1\to-2\to\cdots.$$

$3n+q$ 問題

定理(Lagarias)

奇数qについて, $3n+q$ 問題のqn からスタートする軌道は, $3n+1$ 問題のn からスタートする軌道のq倍となる.

$q=1$ (Collatz予想)のとき,

$$3 \to 5 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 \to 2 \to \cdots.$$

$$\Big\downarrow \times 5$$

$q=5$のとき,

$$15 \to 25 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 10 \to \cdots.$$

$3n+q$ 問題

ここで, 分母が奇数の(既約)分数についても,分子が偶数なら偶数, 分母が奇数なら奇数と“自然”に偶奇を定めることができる.

そうすると, 分母が奇数の有理数全体で$3n+1$問題を考えると, そこに全ての$3n+q$ 問題が含まれることになる.

$3n+5$ 問題について,

$$9 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1 \to 4 \to \cdots.$$

$\Updownarrow$ 同じ軌道！

$3n+1$ 問題について,

$$\frac{9}{5} \to \frac{16}{5} \to \frac{8}{5} \to \frac{4}{5} \to \frac{2}{5} \to \frac{1}{5} \to \frac{4}{5} \to \cdots.$$

問題：もし貴方がCollatz予想を研究していたとして、他の人がCollatz予想を解いてしまったとしたら明日から何をすればよいでしょう？

答え：Collatz Waveを研究すれば良い

軌道の長さ

オリジナルなCollatz予想 ($3n+1$問題)について,ある値が $1 \to 2 \to 1$ というサイクルにたどり着いたとき,初めて1にたどり着くまでの操作の回数を軌道の長さ：σ とする.

$\sigma(1) = 0 \quad 1$

$\sigma(2) = 1 \quad 2 \to 1$

$\sigma(3) = 5 \quad 3 \to 5 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$

$\sigma(4) = 2 \quad 4 \to 2 \to 1$

$\vdots \qquad \vdots$

問題：

$\sigma(n)$が奇数になるnと偶数になるnではどちらが多いでしょうか？

$\sigma(n)$の偶奇

$n=1$から32までの$\sigma(n)$のリスト

n	$\sigma(n)$	n	$\sigma(n)$	n	$\sigma(n)$	n	$\sigma(n)$
1	**0**	9	**13**	17	**9**	25	**16**
2	**1**	10	**5**	18	**14**	26	**8**
3	**5**	11	**10**	19	**14**	27	**70**
4	**2**	12	**7**	20	**6**	28	**13**
5	**4**	13	**7**	21	**6**	29	**13**
6	**6**	14	**12**	22	**11**	30	**13**
7	**11**	15	**12**	23	**11**	31	**67**
8	**3**	16	**4**	24	**8**	32	**5**

$\sigma(n)$が偶数となるのは16 コ, 奇数となるのは16 コ.

$\sigma(n)$の偶奇

$n = 1001$から1032までの$\sigma(n)$のリスト

n	$\sigma(n)$
1001	**91**
1002	**72**
1003	**29**
1004	**45**
1005	**45**
1006	**45**
1007	**61**
1008	**72**

n	$\sigma(n)$
1009	**72**
1010	**42**
1011	**42**
1012	**72**
1013	**72**
1014	**26**
1015	**26**
1016	**34**

n	$\sigma(n)$
1017	**99**
1018	**34**
1019	**42**
1020	**34**
1021	**34**
1022	**42**
1023	**42**
1024	**10**

n	$\sigma(n)$
1025	**26**
1026	**26**
1027	**26**
1028	**80**
1029	**80**
1030	**80**
1031	**26**
1032	**80**

$\sigma(n)$が偶数となるのは7 コ, 奇数となるのは25 コ.

$\sigma(n)$の偶奇

$n = 10001$から10032までの$\sigma(n)$のリスト

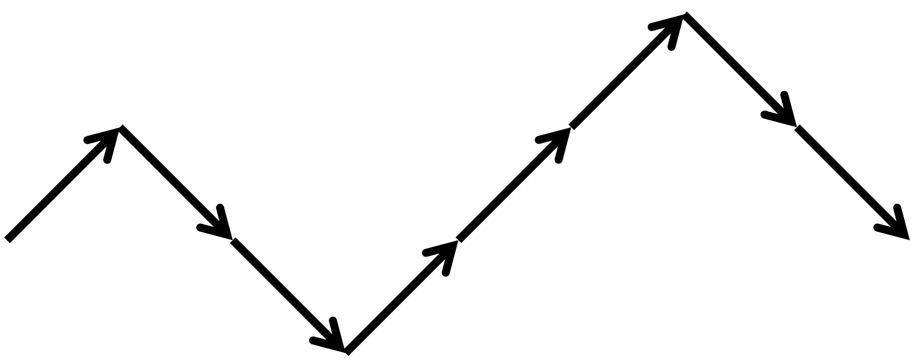
n	$\sigma(n)$	n	$\sigma(n)$	n	$\sigma(n)$	n	$\sigma(n)$
10001	**115**	10009	**107**	10017	**61**	10025	**61**
10002	**45**	10010	**23**	10018	**61**	10026	**88**
10003	**45**	10011	**134**	10019	**61**	10027	**61**
10004	**23**	10012	**45**	10020	**61**	10028	**31**
10005	**23**	10013	**45**	10021	**61**	10029	**31**
10006	**115**	10014	**45**	10022	**61**	10030	**31**
10007	**115**	10015	**45**	10023	**45**	10031	**34**
10008	**23**	10016	**88**	10024	**88**	10032	**88**

$\sigma(n)$が偶数となるのは26 コ, 奇数となるのは6 コ.

$\sigma(n)$の偶奇

一般に $\sigma(n)$ の偶奇は一見するとランダムで法則性がないようである.
しかし大きい所を見ると, 局所的には同じ偶奇が連続している.

そこで次のようなグラフを描いてみる：
$\sigma(n)$ が偶数なら+1する
$\sigma(n)$ が奇数なら-1する

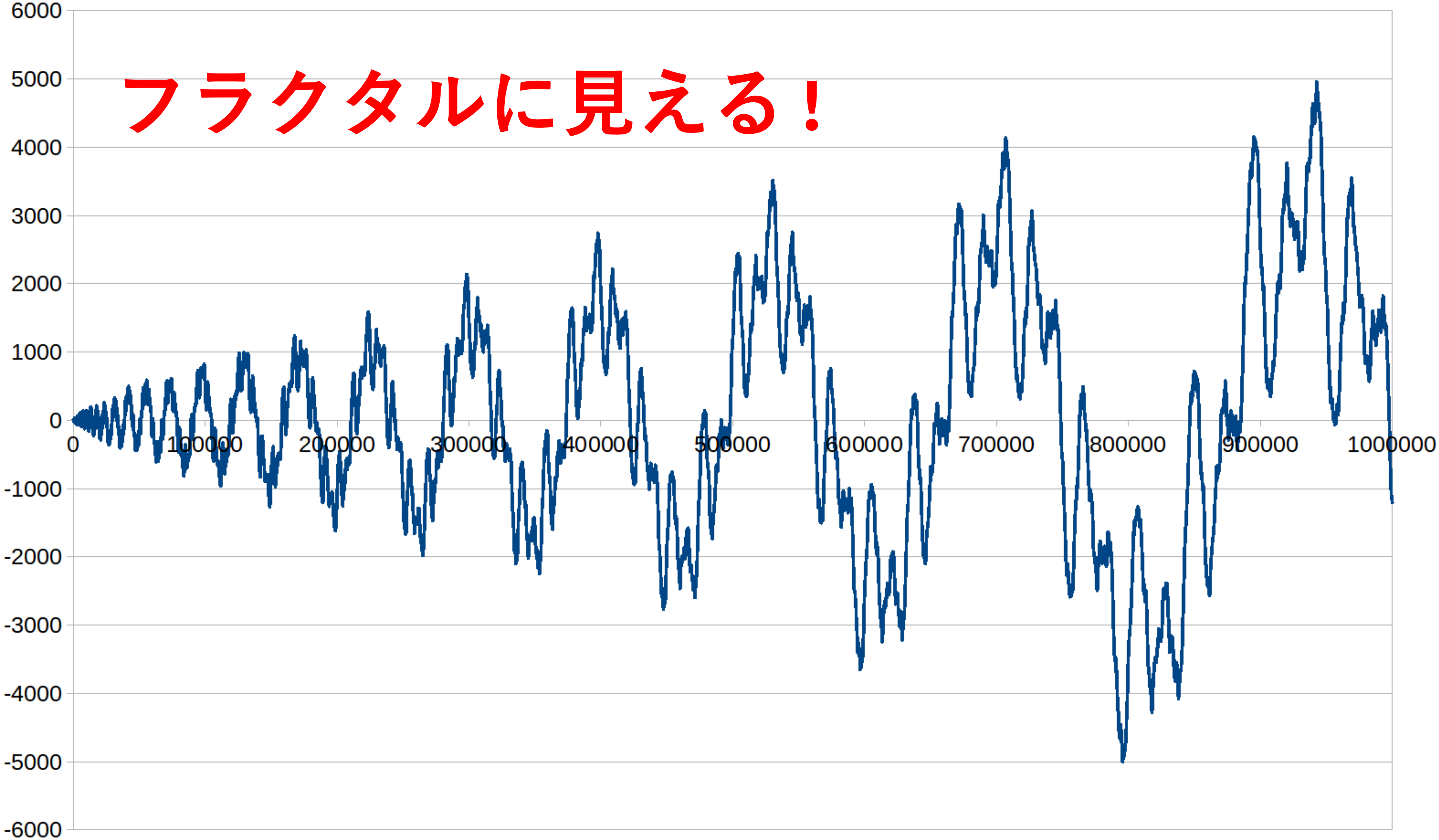


$\sigma(8) = \mathbf{3}$

n	$\sigma(n)$
1	0
2	1
3	5
4	2
5	4
6	6
7	11
8	**3**

$\sigma(n)$の偶奇

$\mathrm{n} = 1$から10^6までのグラフ:

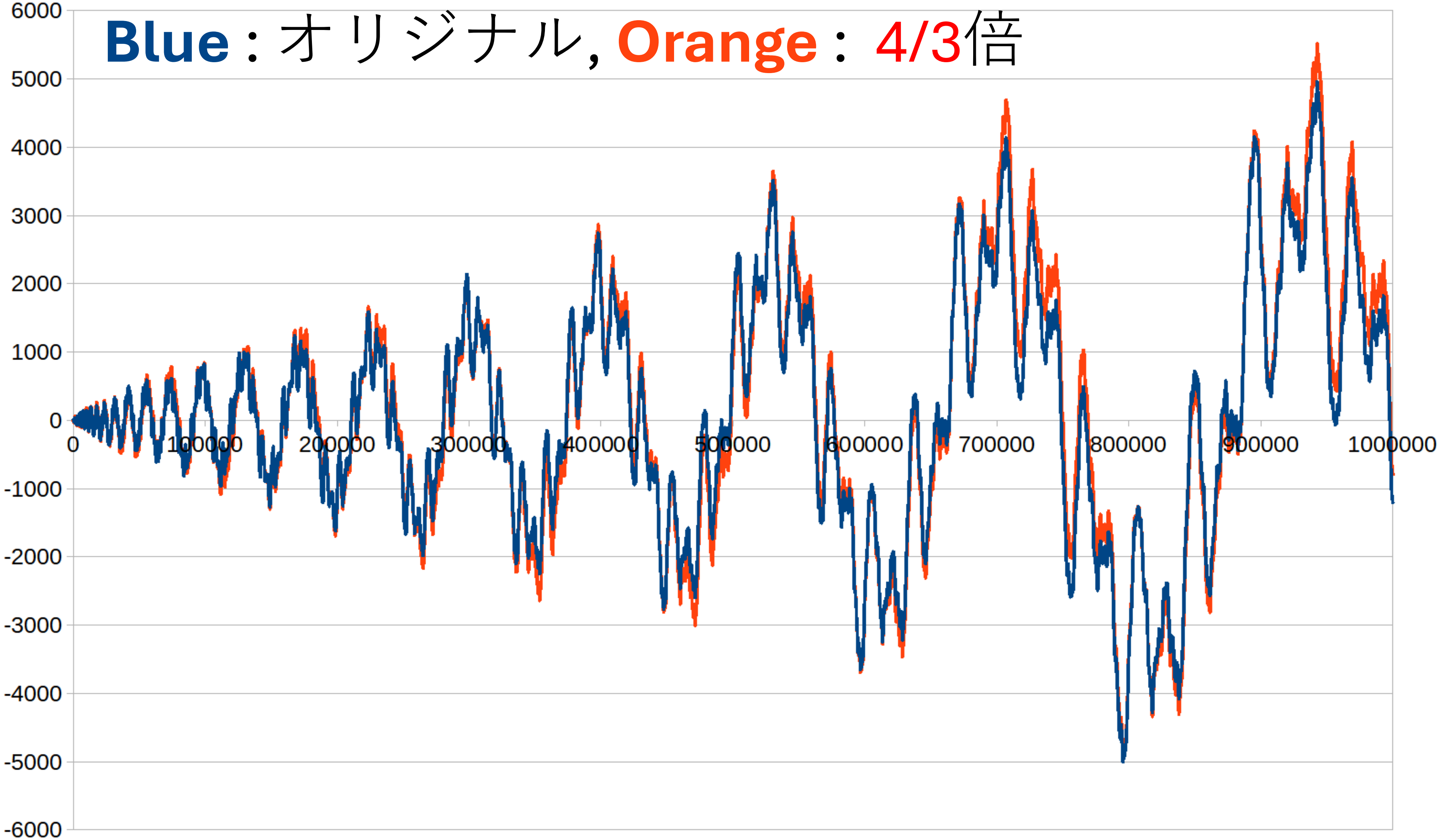


$\sigma(n)$の偶奇

$\mathrm{n} = 1$から10^6までのデータを利用してx倍との差分の二乗和を取ったグラフ:

$\sigma(n)$の偶奇

$\mathrm{n} = 1$から10^6までのグラフ:



$3n+7$ 問題

次の操作を考える:
自然数 n について
n が 偶数ならば, $n/2$に移す,
n が 奇数ならば, $(3n+7)/2$に移す.

整数からスタートすると6つのサイクルが現れる:

- $0 \to 0 \to \cdots$ (長さ 1)
- $7 \to 14 \to 7 \to \cdots$ (長さ2)
- $-7 \to -7 \to \cdots$ (長さ2)
- $-35 \to -49 \to -70 \to -35 \to \cdots$ (長さ3)
- $-119 \to -175 \to \cdots \to -119 \to$ (長さ11)
- $5 \to 11 \to 20 \to 10 \to \cdots$ (長さ4)

$3n + 7$ 問題

- $0 \to 0 \to \cdots$ (length 1)
- $7 \to 14 \to 7 \to \cdots$ (length 2)
- $-7 \to -7 \to \cdots$ (length 2)
- $-35 \to -49 \to -70 \to -35 \to \cdots$ (length 3)
- $-119 \to -175 \to \cdots \to -119 \to$ (length 11)

3n+1 問題由来のもの(3n+1 問題のサイクルの7倍)

- $5 \to 11 \to 20 \to 10 \to \cdots$ (length 4)

$3n + 7$ 問題

- $0 \to 0 \to \cdots$ (length 1)
- $7 \to 14 \to 7 \to \cdots$ (length 2)
- $-7 \to -7 \to \cdots$ (length 2)
- $-35 \to -49 \to -70 \to -35 \to \cdots$ (length 3)
- $-119 \to -175 \to \cdots \to -119 \to$ (length 11)

7の倍数でない整数から始めると全てこのサイクルにたどり着く

- $\boxed{5 \to 11 \to 20 \to 10 \to \cdots \text{(length 4)}}$

$3n+7$ 問題

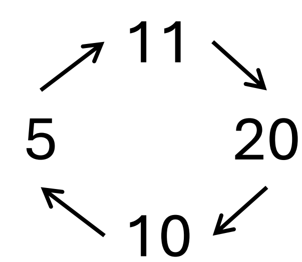
$\sigma_5(n)$ を 5に初めてたどり着くまでの操作の回数とする.ただし, 5にたどり着かないとき (別のサイクルにたどり着くとき), $\sigma_5(n)$ は∞とする.

各 $d = 0,1,2,3$ について, グラフを次のように描く:

$\sigma_5(n) \equiv d \pmod 4$のとき+3

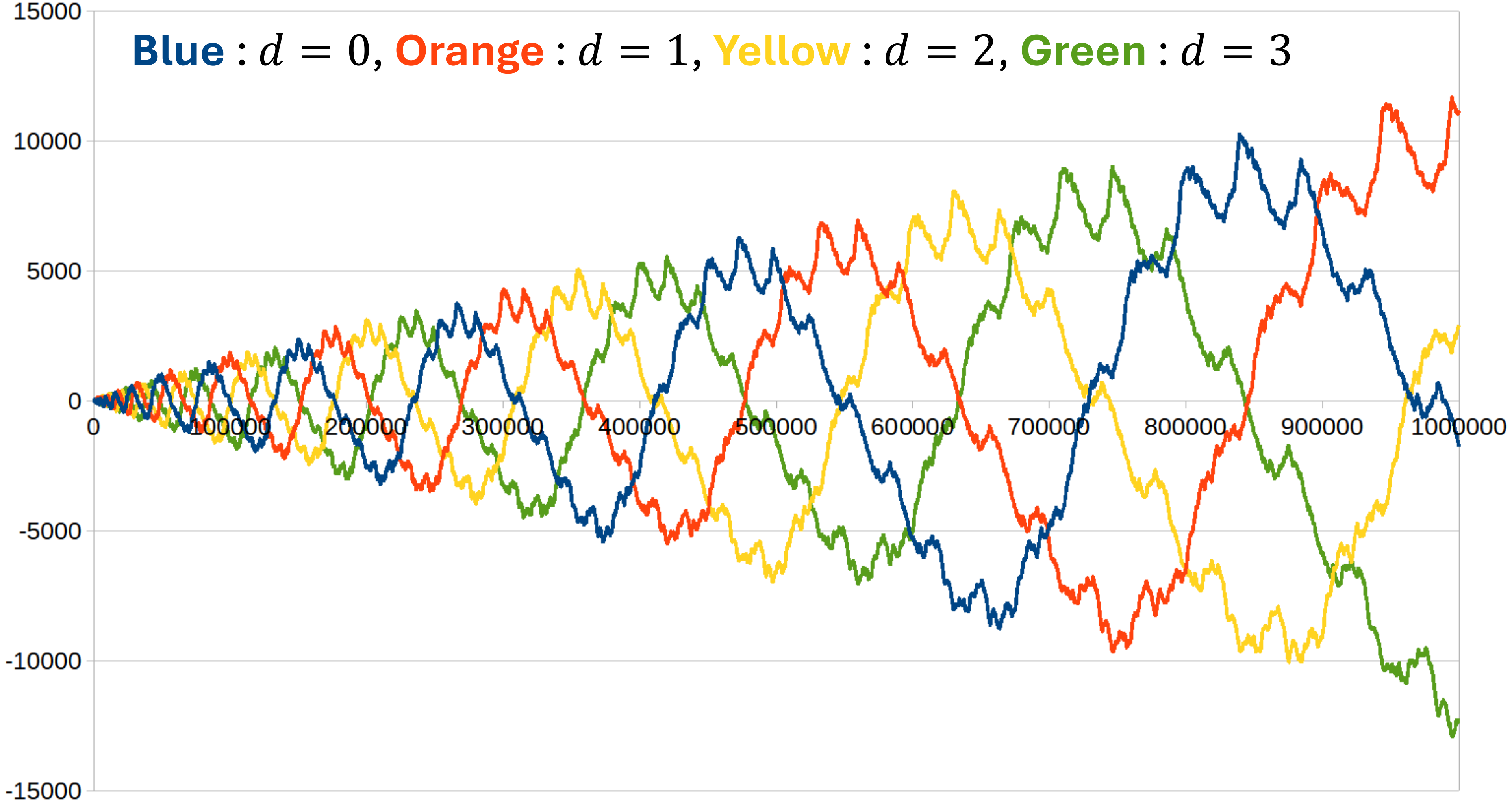
$\sigma_5(n) = \infty$のとき,そのまま

$\sigma_5(n) \not\equiv d \pmod 4$のとき-1



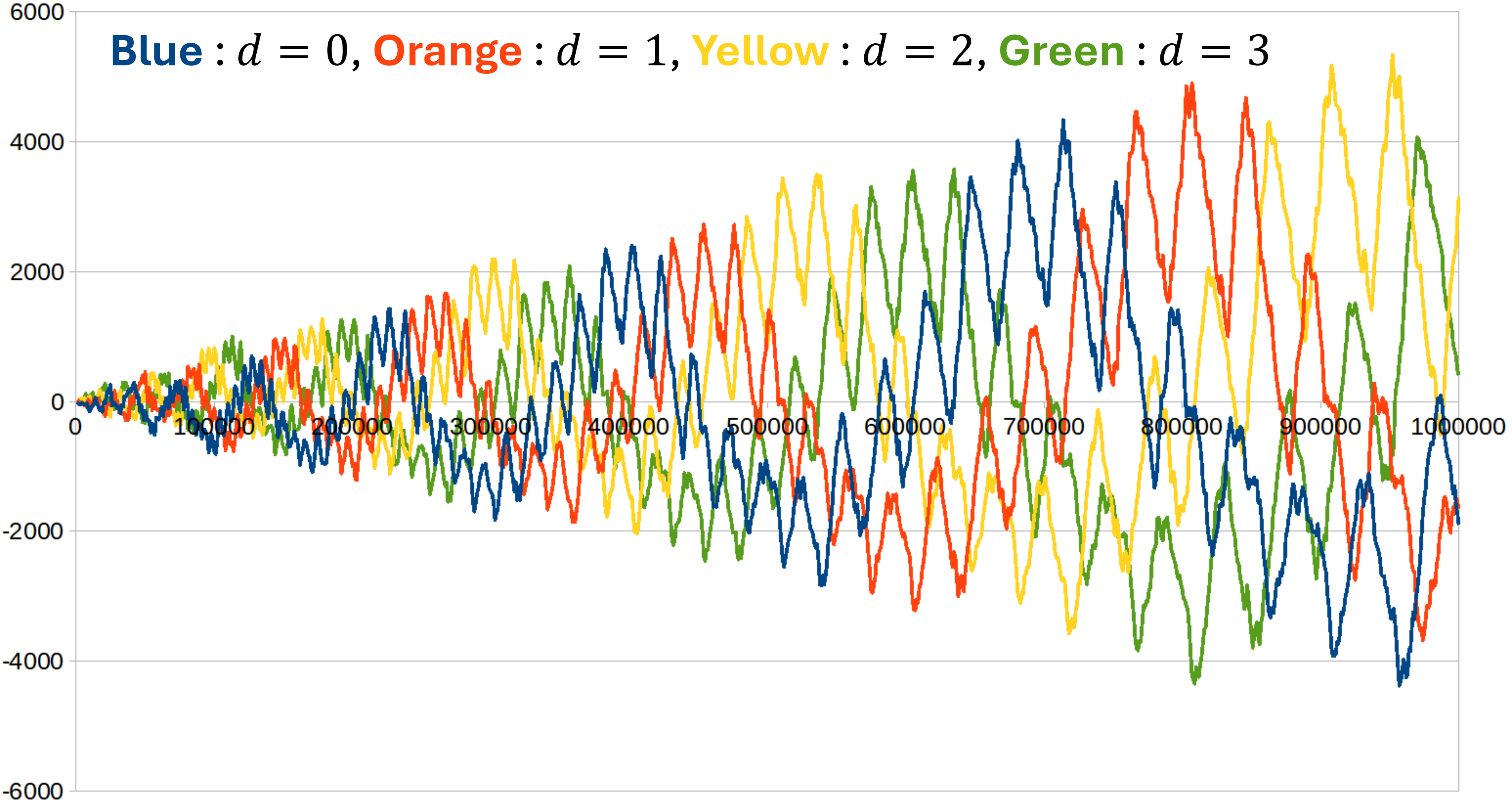
$3n+7$ 問題

$\mathrm{n} = 1$ から 10^6 までのグラフ:



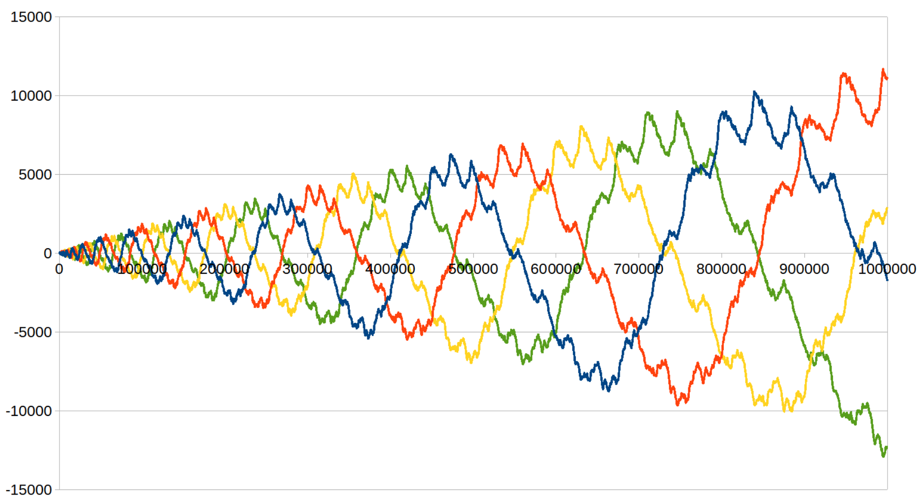
$3n+7$ 問題

$\mathrm{n} = -1$ から -10^6 までのグラフ:

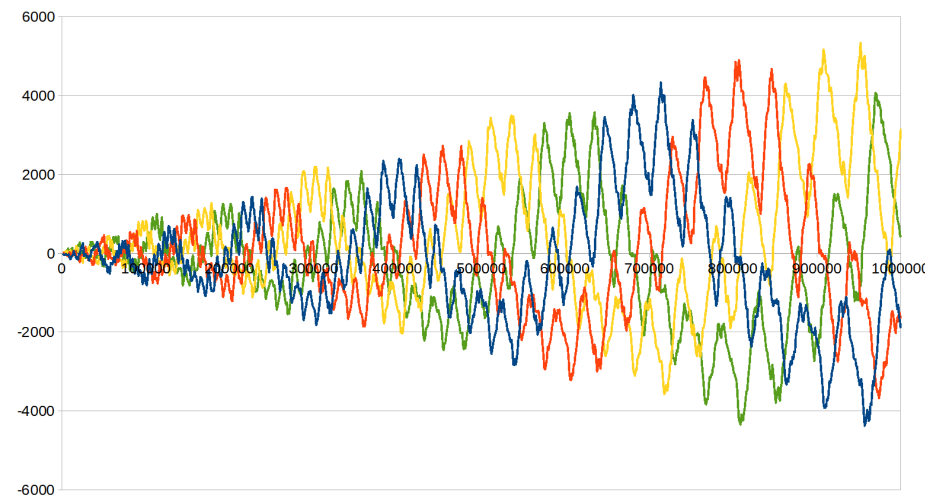


$3n + 7$ 問題

両方ともフラクタルに見えるがその振る舞いは異なる.



正の数についてのグラフ



負の数についてのグラフ

Blue : $d = 0$, **Orange** : $d = 1$, **Yellow** : $d = 2$, **Green** : $d = 3$

他の例

一般に $3n+q$ 問題が cから始まる 長さ ℓのサイクルを持つとき, $\sigma_c(n)$を始めて cにたどり着くまでの操作の回数とする (cにたどり着かないときは∞).

各 $d = 0$ から $\ell - 1$について,次のようにグラフを描く:

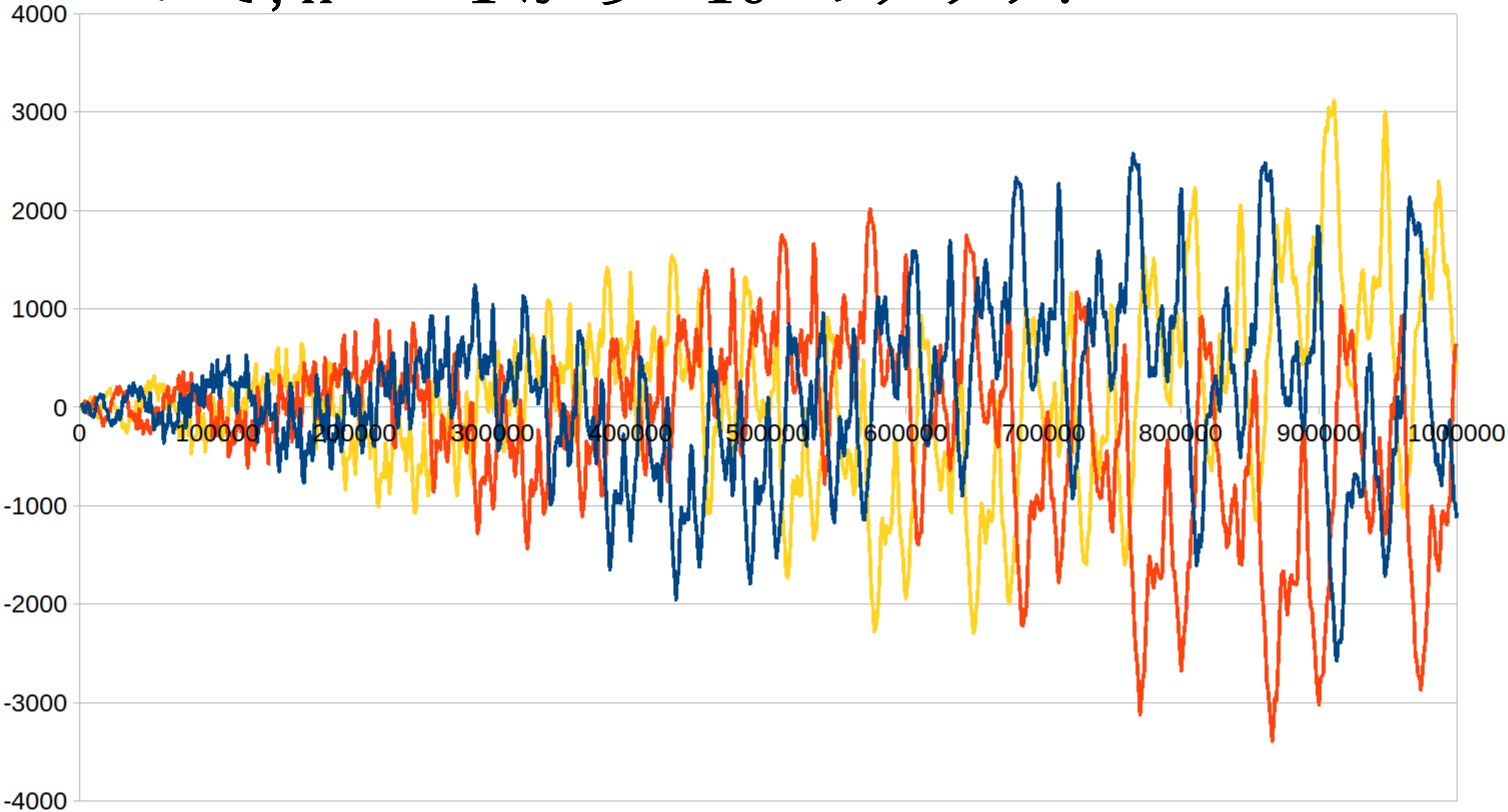
$\sigma_c(n) \equiv d \pmod{\ell}$のとき, $+(\ell - 1)$

$\sigma_c(n) = \infty$のとき, そのまま

$\sigma_c(n) \not\equiv d \pmod{\ell}$のとき, -1

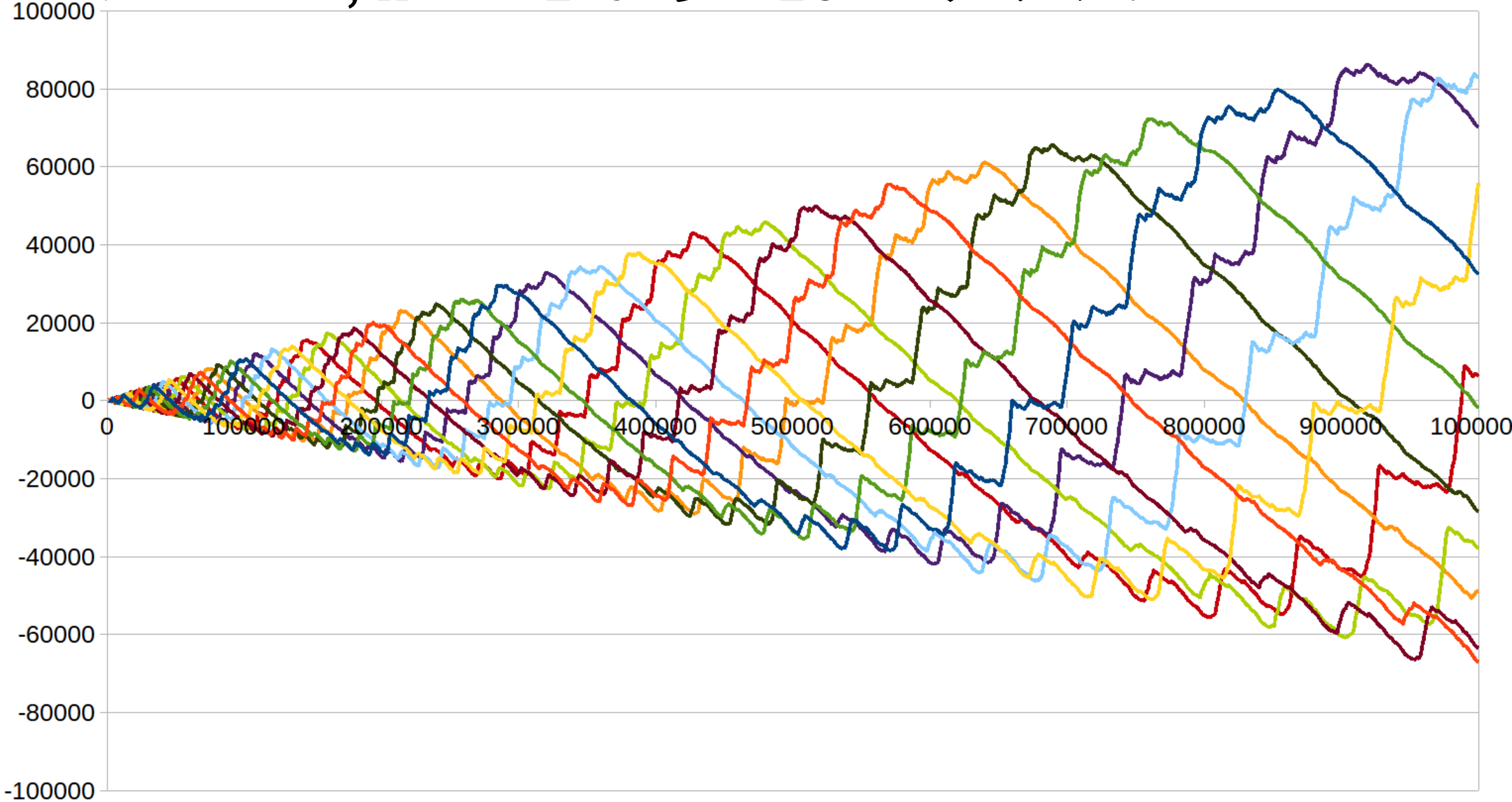
他の例

$3n+1$ 問題の-5から始まる長さ3のサイクルについて, $\mathbf{n}=-\mathbf{1}$ から $-\mathbf{10^6}$のグラフ:



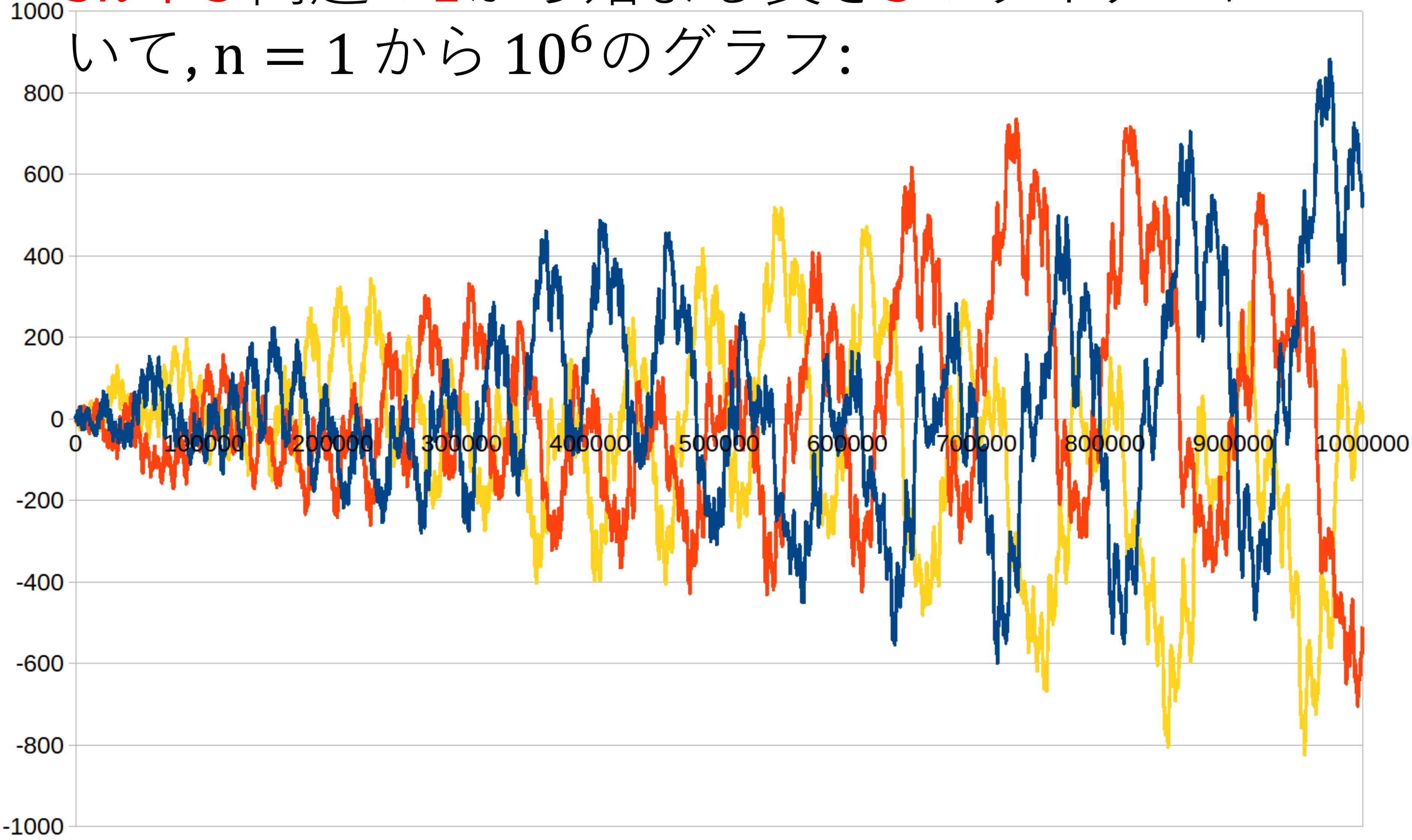
他の例

$3n+1$ 問題の-17から始まる長さ11のサイクルについて, $\mathbf{n = -1}$ から $\mathbf{-10^6}$のグラフ:



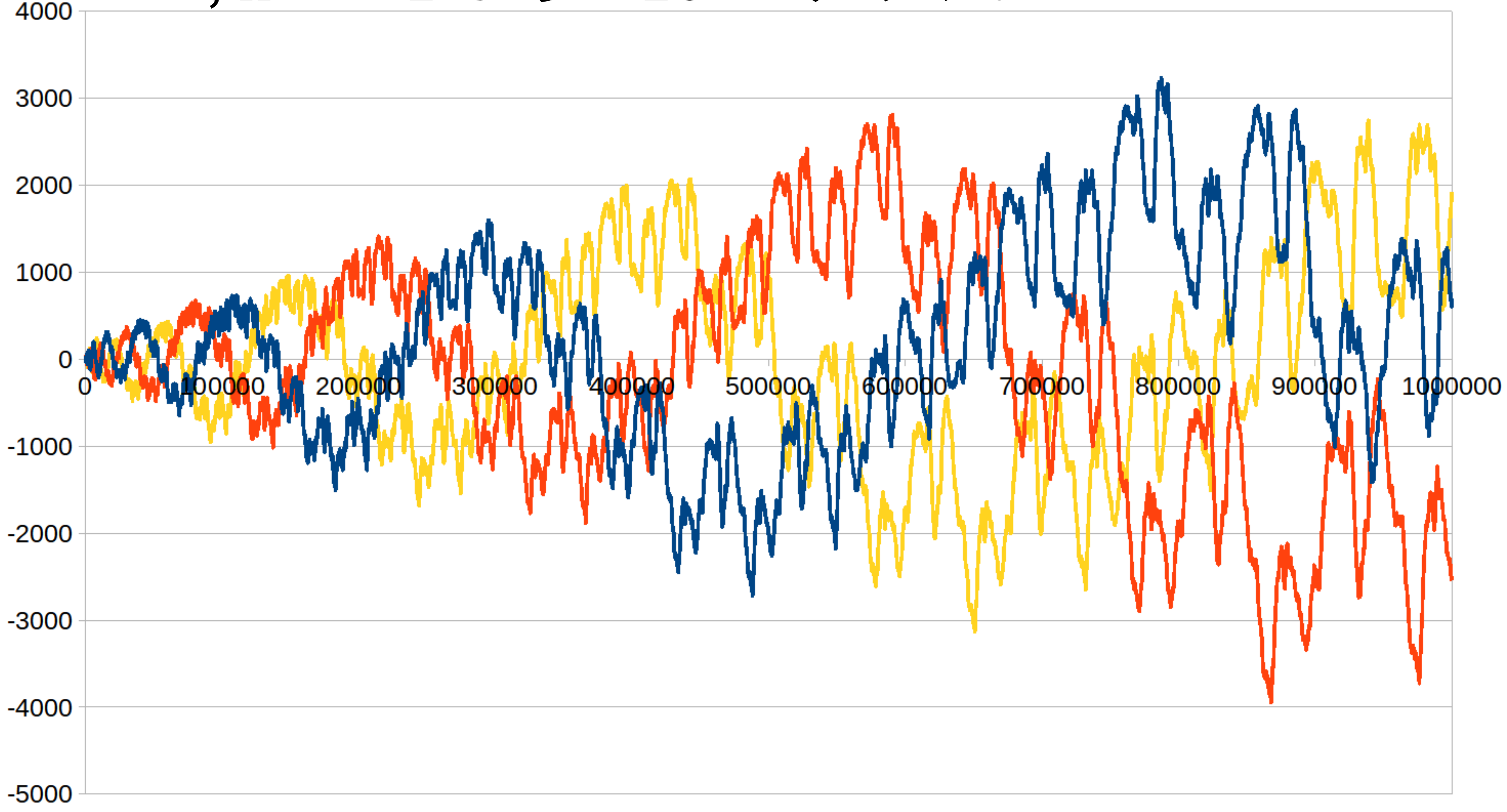
他の例

$3n+5$ 問題の1から始まる長さ3のサイクルについて, $\mathbf{n} = \mathbf{1}$ から $\mathbf{10^6}$ のグラフ:



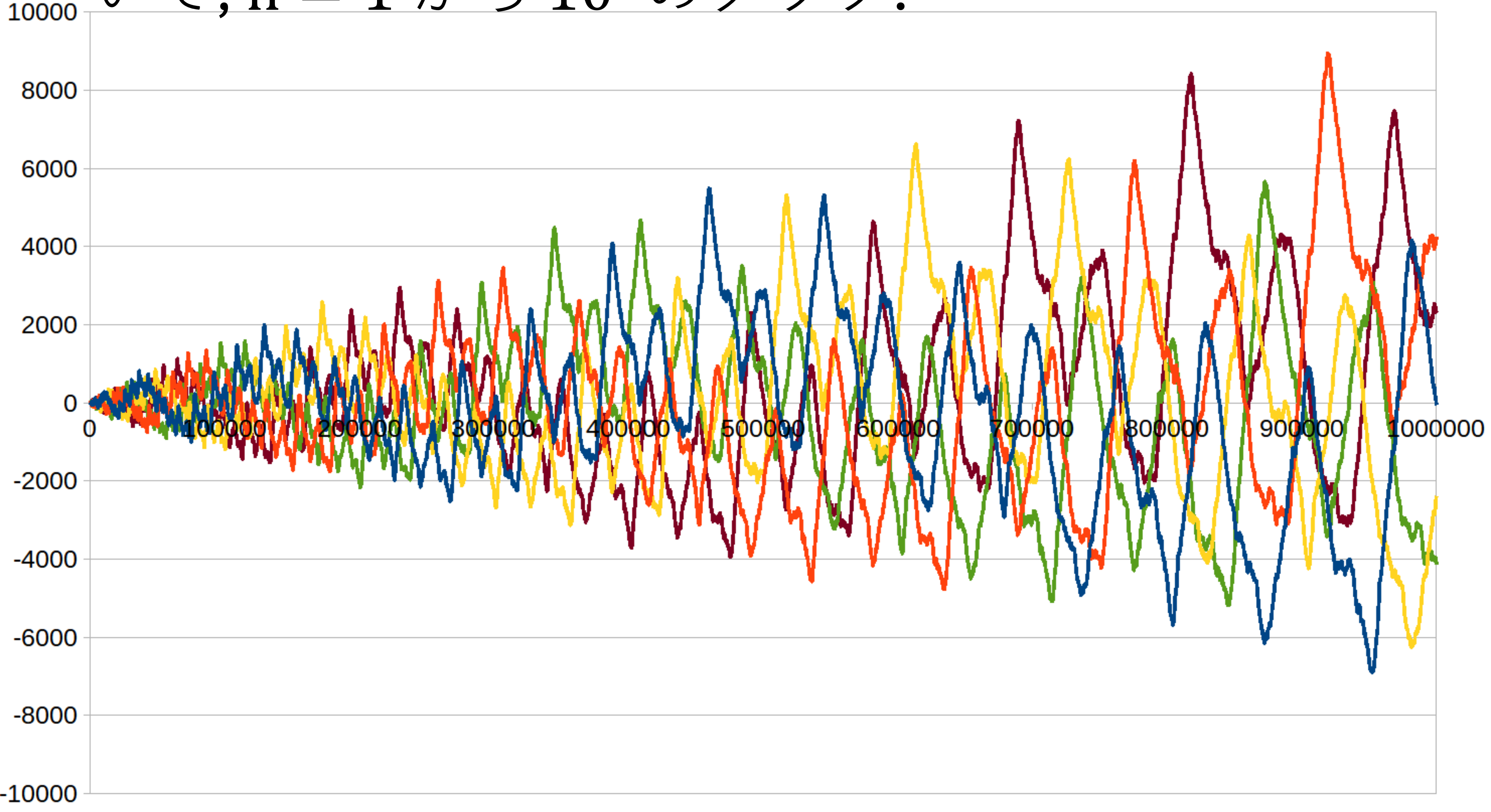
他の例

$3n+5$ 問題の1から始まる長さ3のサイクルについて, $\mathbf{n}=-1$ から -10^6 のグラフ:



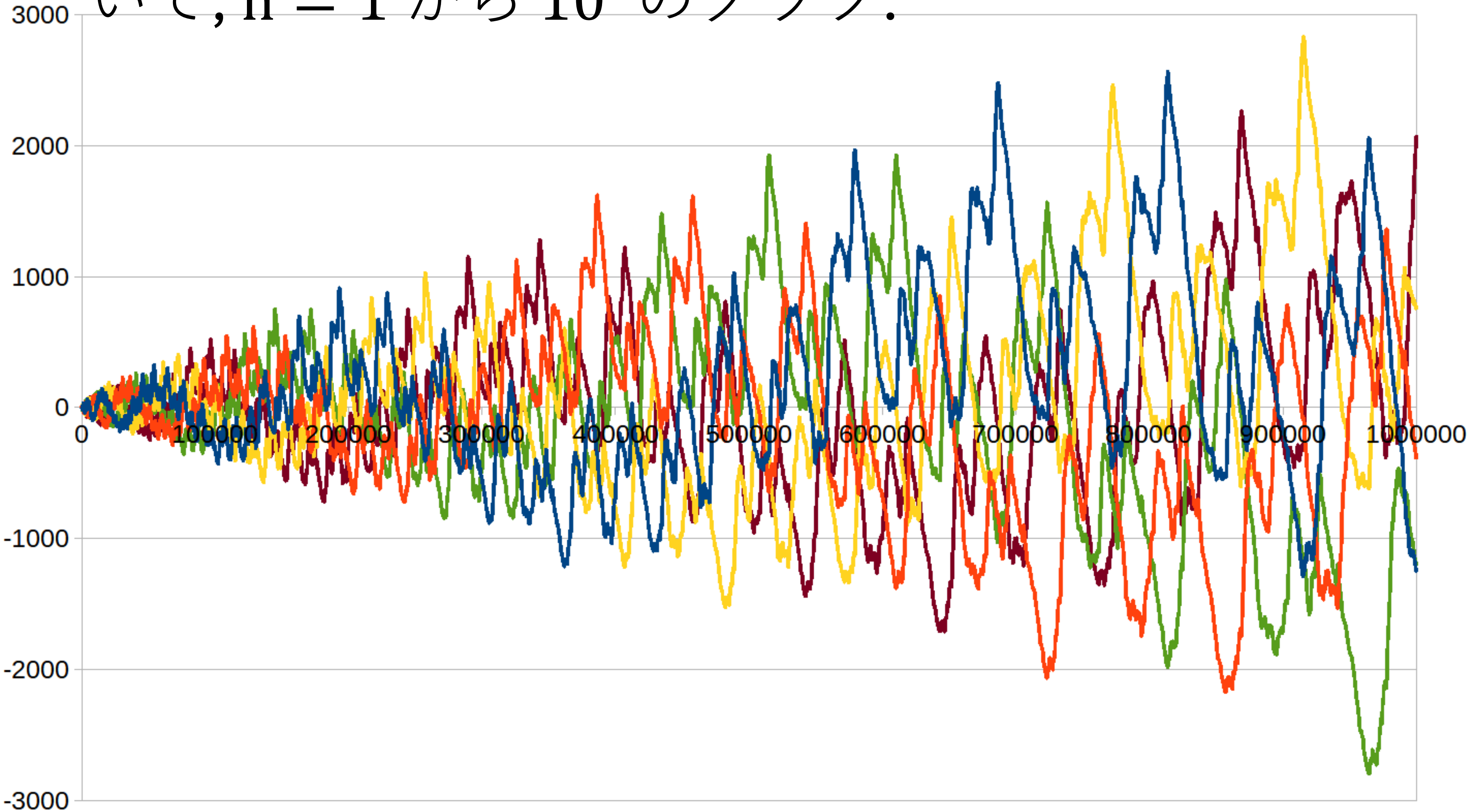
他の例

$3n+5$ 問題の19から始まる長さ5のサイクルについて, $\mathbf{n} = \mathbf{1}$ から $\mathbf{10^6}$ のグラフ:



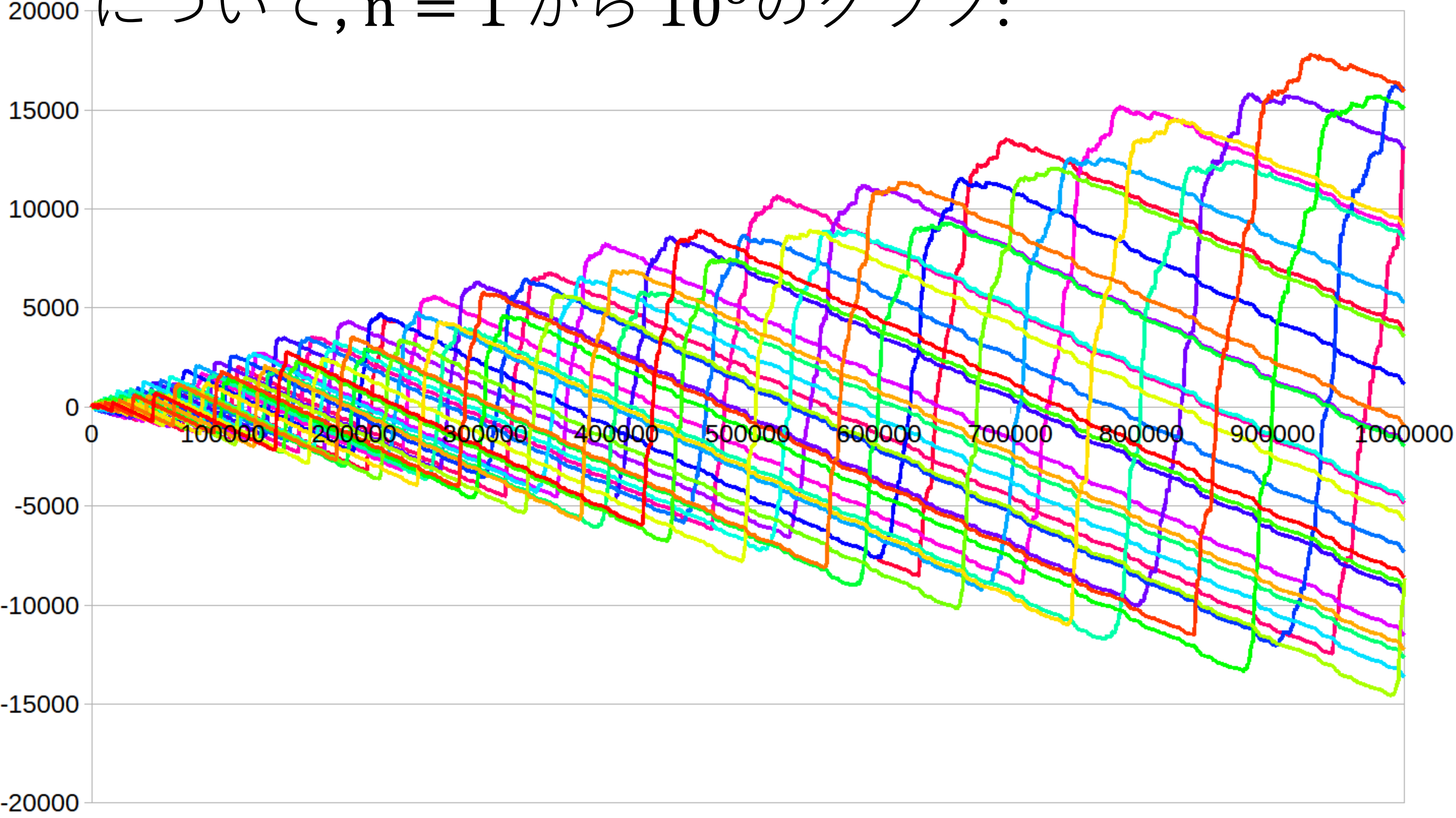
他の例

$3n+5$ 問題の23から始まる長さ5のサイクルについて, $\mathbf{n=1}$ から $\mathbf{10^6}$ のグラフ:



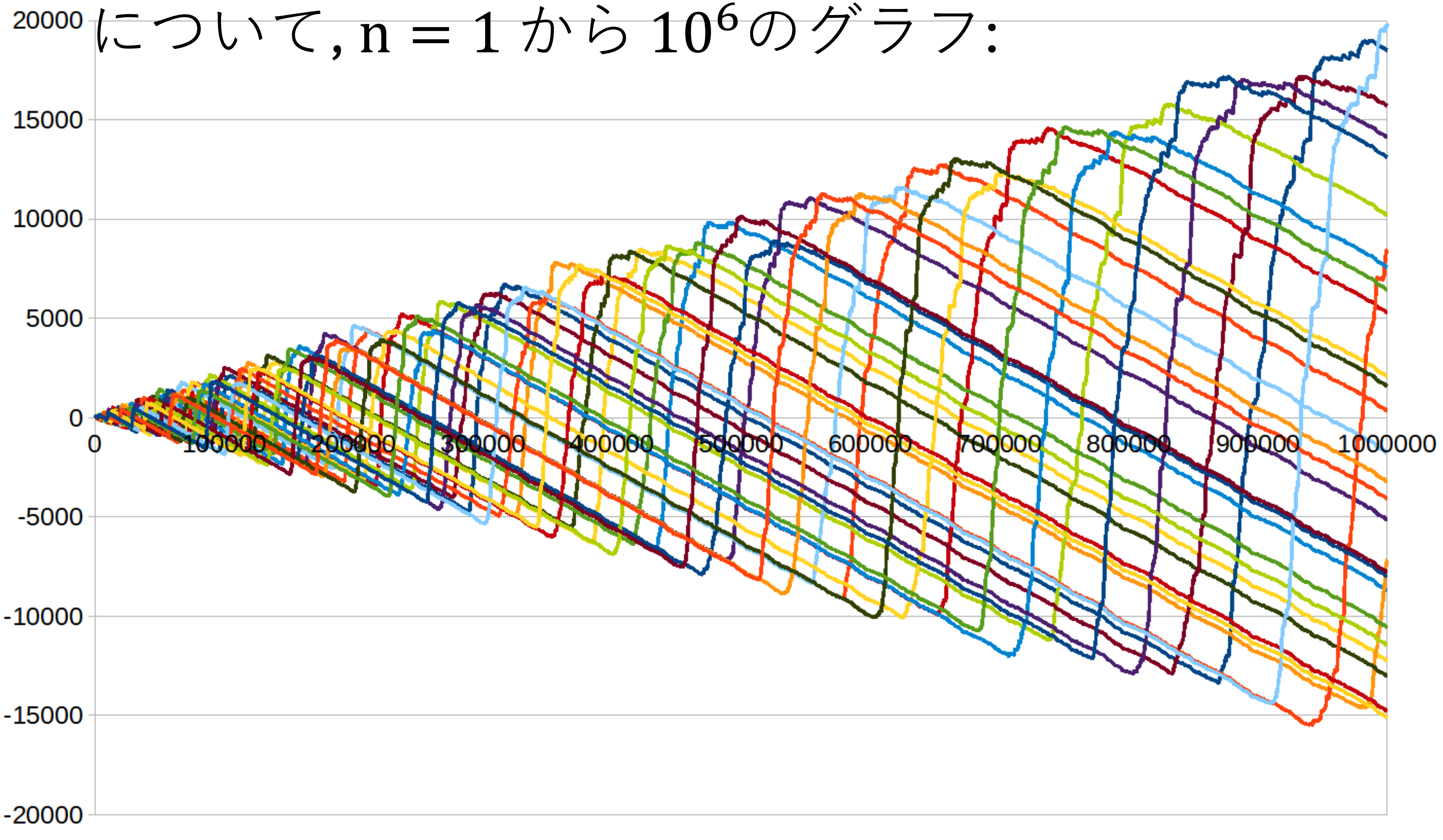
他の例

$3n+5$ 問題の187から始まる長さ27のサイクルについて, $\mathbf{n = 1}$ から $\mathbf{10^6}$ のグラフ:



他の例

$3n+5$ 問題の347から始まる長さ27のサイクルについて, $\mathbf{n=1}$ から $\mathbf{10^6}$ のグラフ:



参照

- A. Jomura, “Properties of Collatz functions with odd roots of algebraic equations”, (2023) Master Thesis, Hiroshima University
- Jeffrey C. Lagarias, *The Ultimate Challenge: The 3x + 1 Problem*, American Mathematical Society, 2010.
- E. Roosendaal, www.ericr.nl/wondrous. Retrieved January 7, 2025
- K. Watanabe, “Generalization of the Collatz conjecture to $\mathbb{Z}_2$ and its applications”, (2020) Master Thesis, Hiroshima University