順列 (P) と組合せ (C) の総和について

pn675*

2019/11/30

1　順列 (P) の総和

異なる n 個の元から異なる r 個の選んで並べた順列の総数を ${}_nP_r$ とあらわし, 以下のように定義されます.

$$\begin{aligned} {}_nP_r &= n * (n-1) * \cdots * (n-r+1) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

この総和は単純な式として表すことは出来ませんが, 次のような精度の良い近似式が存在します.

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{n} {}_nP_r &= \sum_{r=1}^{n} \frac{n!}{(n-r)!} \\ &= n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \approx n! \cdot e \end{aligned}$$

2　組合せ (C) の総和

異なる n 個の元から異なる r 個の選んだ組合せの総数を ${}_nC_r$ とあらわし, 以下のように定義されます.

$$\begin{aligned} {}_nC_r &= \frac{n * (n-1) * \cdots * (n-r+1)}{r * \cdots * 1} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!r!} \end{aligned}$$

組合せ $({}_nC_r)$ は, 順列 $({}_nP_r)$ から並べ方の違いを無視したものであるため ${}_nC_r = {}_nP_r / r!$ という関係式が成り立ちます.

${}_nC_r$ は別名二項係数 $\binom{n}{k}$ とも呼ばれ, 二項定理の係数として現れます.

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

そのため, この公式を利用して $x = 1$ とすると, その総和は以下の様になります.

$$\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k = 2^n$$

*pn675 の Web ページ (`http://pn675.html.xdomain.jp/`)