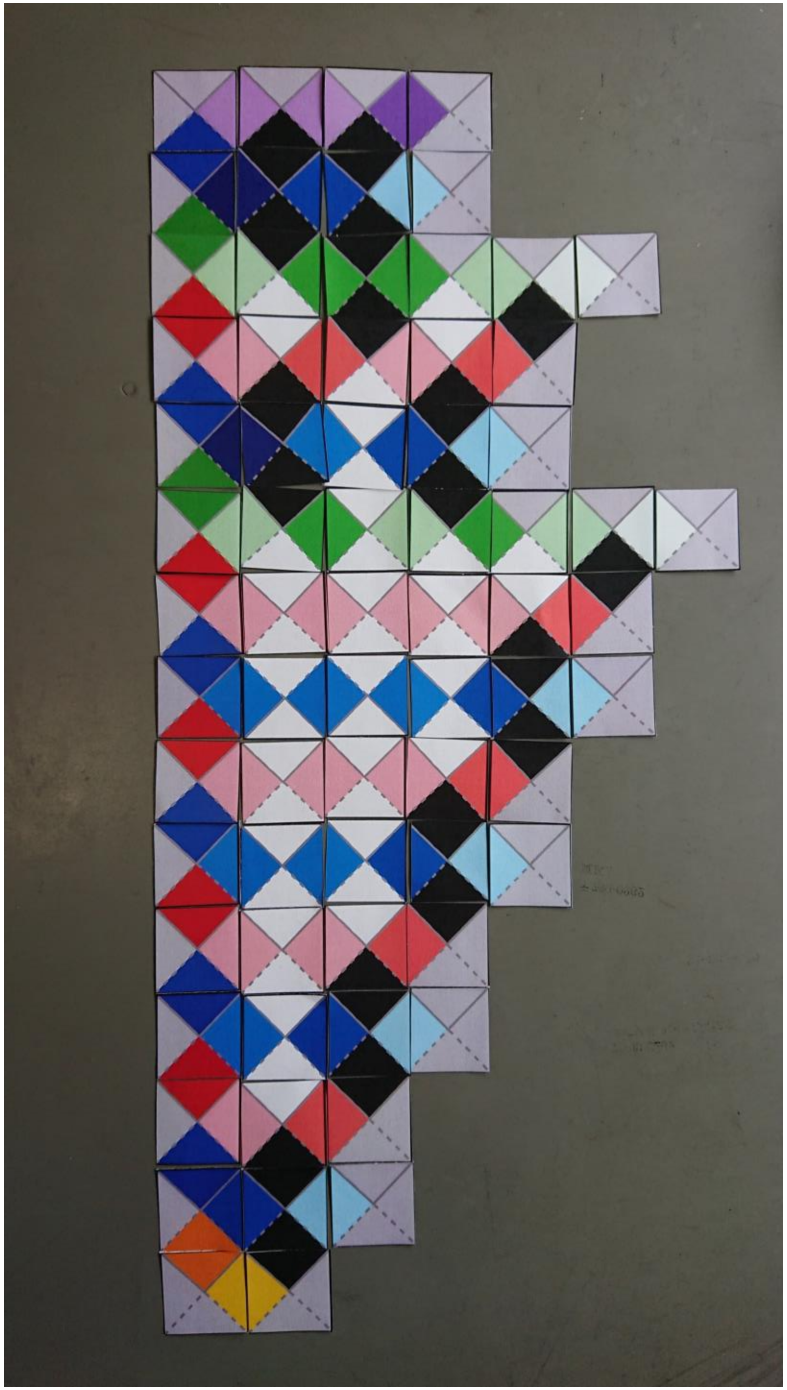
Collatz Tiling

2023/03/16

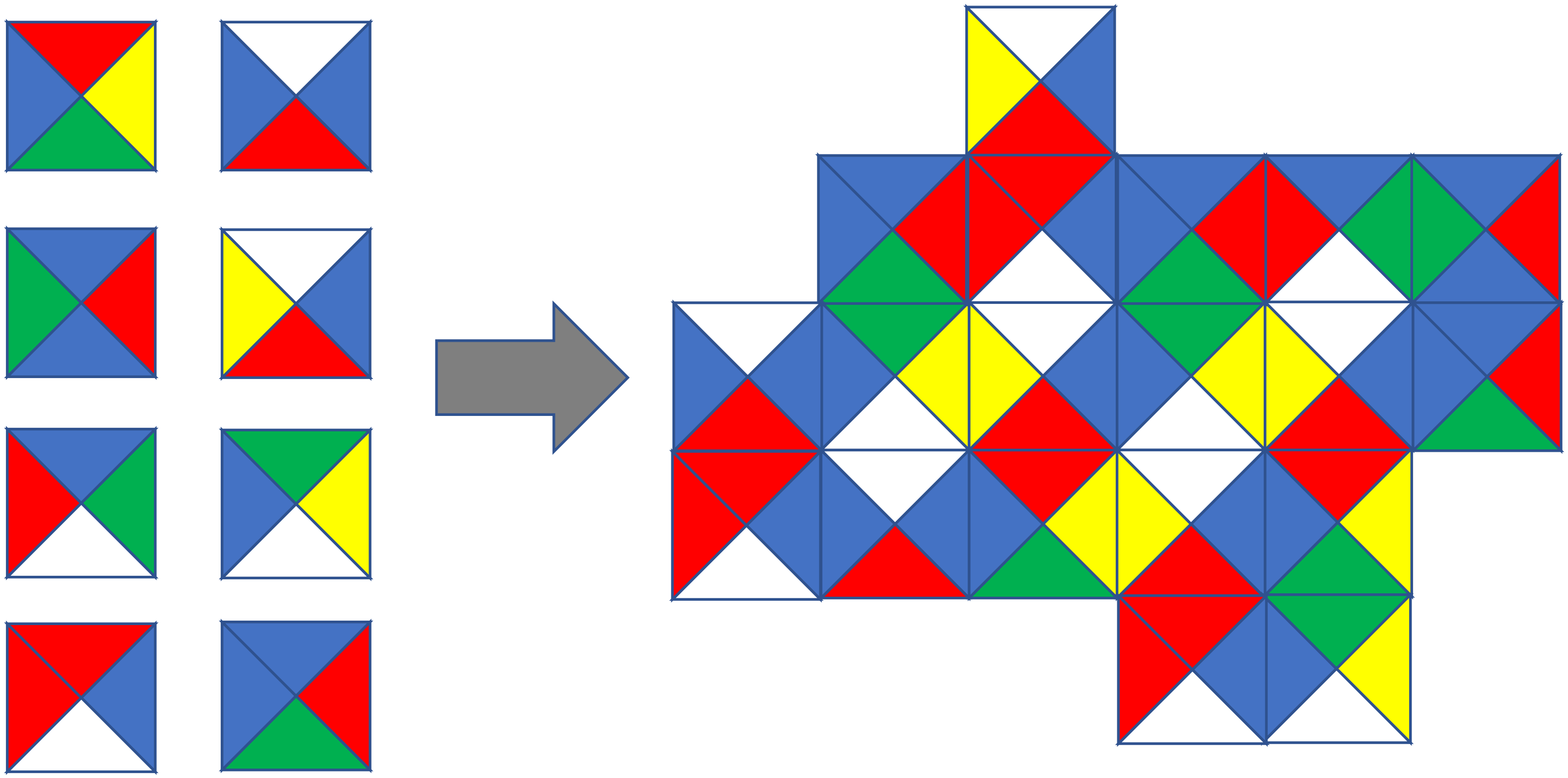
pn675 (http://pn675.html.xdomain.jp/)

同じ色の辺をくっつけて並べるという規則で、ある自然数nについてCollatz予想が成立するか判定できる有限種類のタイルの集合



ワンのタイル

- 正方形が対角線で四つの領域に区切られている有限種類のタイルの組合せ
- 同じ色の辺をくっつけて敷き詰めるという規則
- 回転、鏡映は不可



ワンのタイル

ワンは「有限種類のタイルの組合せで平面全体の敷き詰めが可能なら周期的な敷き詰めが存在する」と予想した。

付随するドミノ問題：「有限種類のタイルの任意の組合せによる平面全体の敷き詰めが決定可能か？」

後年、ワンの学生のロバート・バーガーによりドミノ問題が決定不能であることが示された。

証明のアイデア：任意のチューリングマシンを、それが停止する場合のみ敷き詰め可能なタイルの組合せに変換する。
チューリングマシンの停止問題は決定不能⇒ドミノ問題は決定不能

適当なタイルの組合せを与えれば
任意のチューリングマシンが構成可能

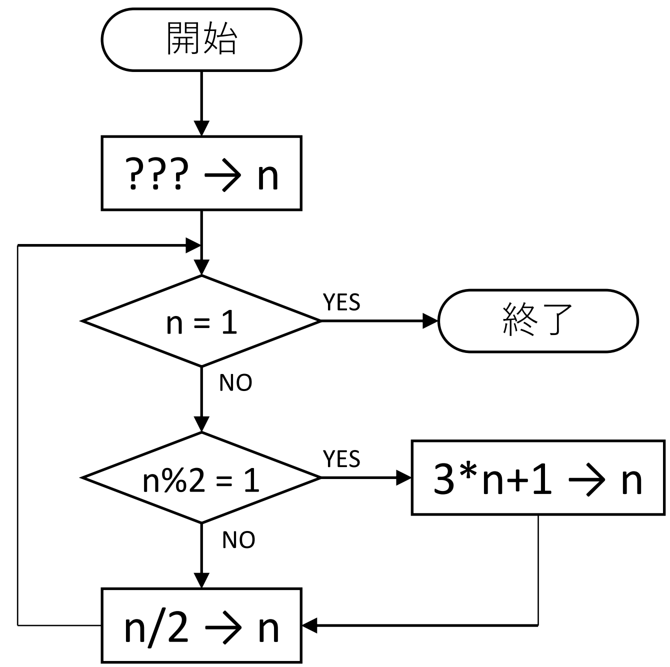
適当なタイルの組合せを与えれば
Collatz予想を検証することが可能

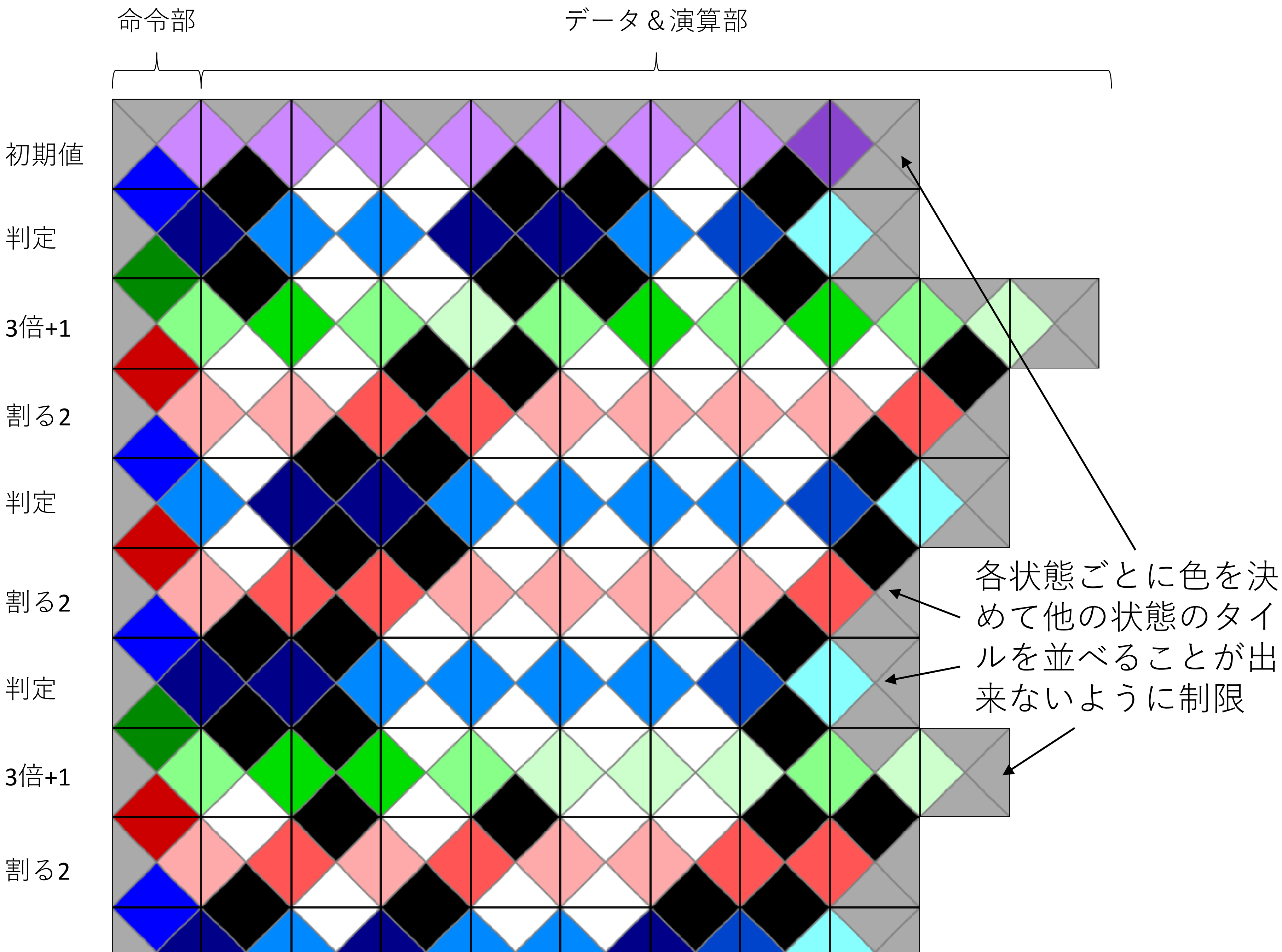
Collatz予想を検証するアルゴリズム

BASIC風のコード

```
100 LET n = ???
110 IF n = 1 GOTO 160
120 IF n%2 = 1 GOTO 130 ELSE GOTO 140
130 LET n = 3*n+1
140 LET n= n/2
150 GOTO 110
160 END
```

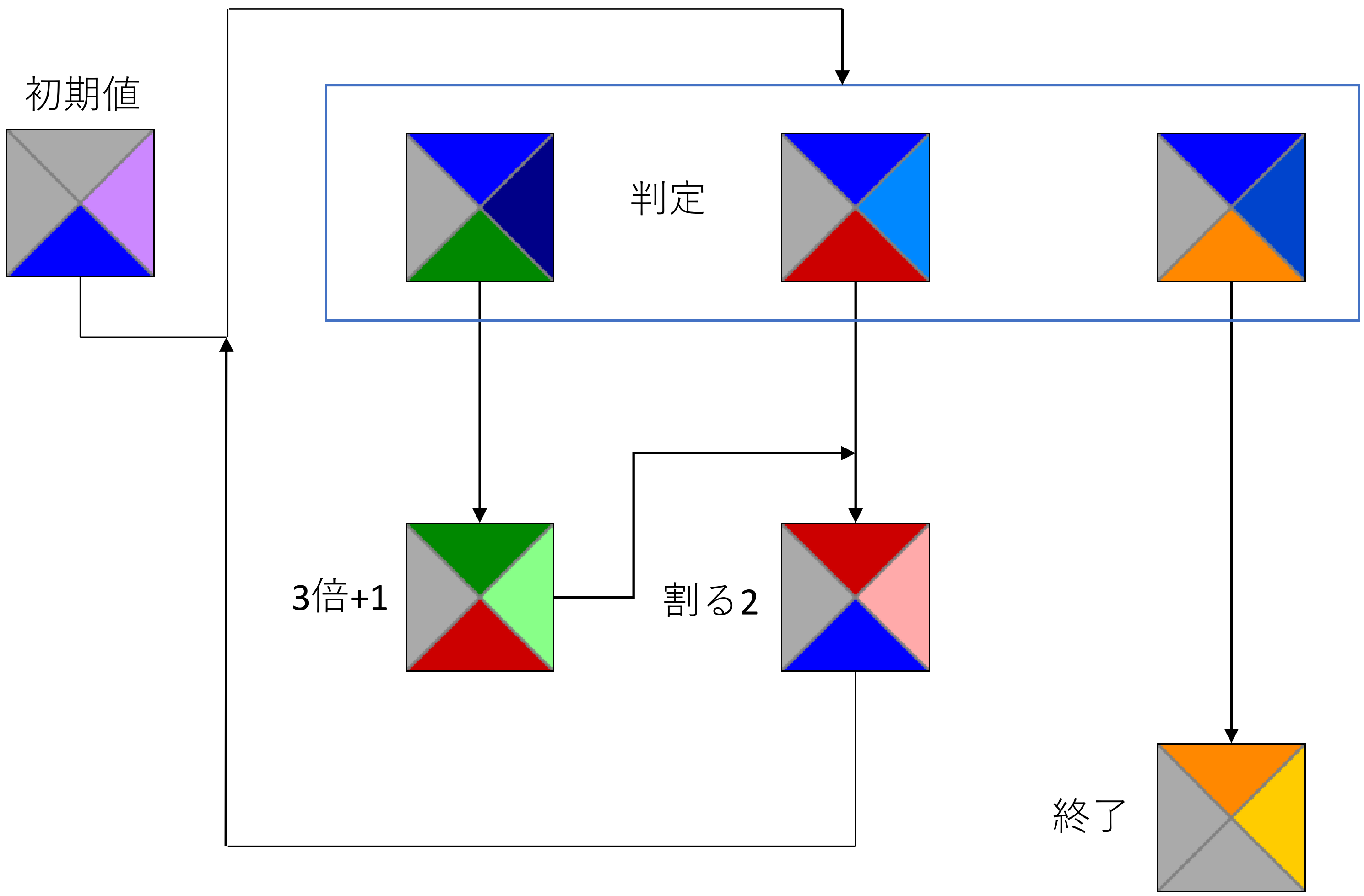
フローチャート



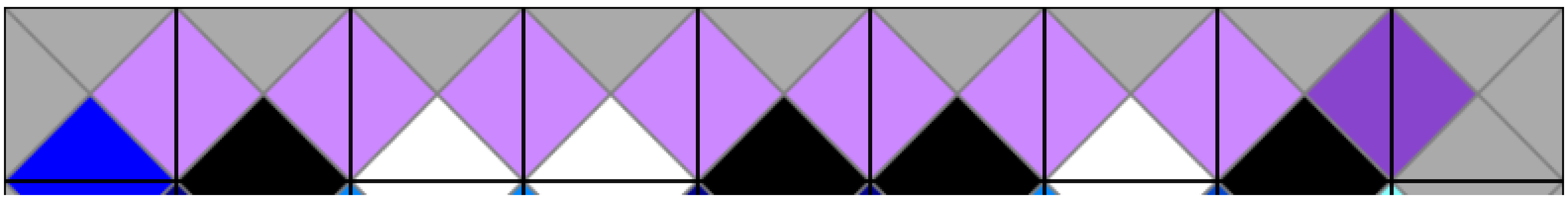


命令部
データ＆演算部
初期値
判定
3倍+1
割る2
判定
割る2
判定
3倍+1
割る2
各状態ごとに色を決めて他の状態のタイルを並べることが出来ないように制限

命令部



初期値

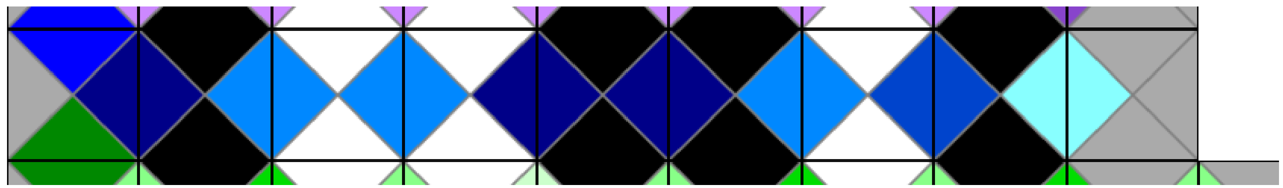


命令
タイル

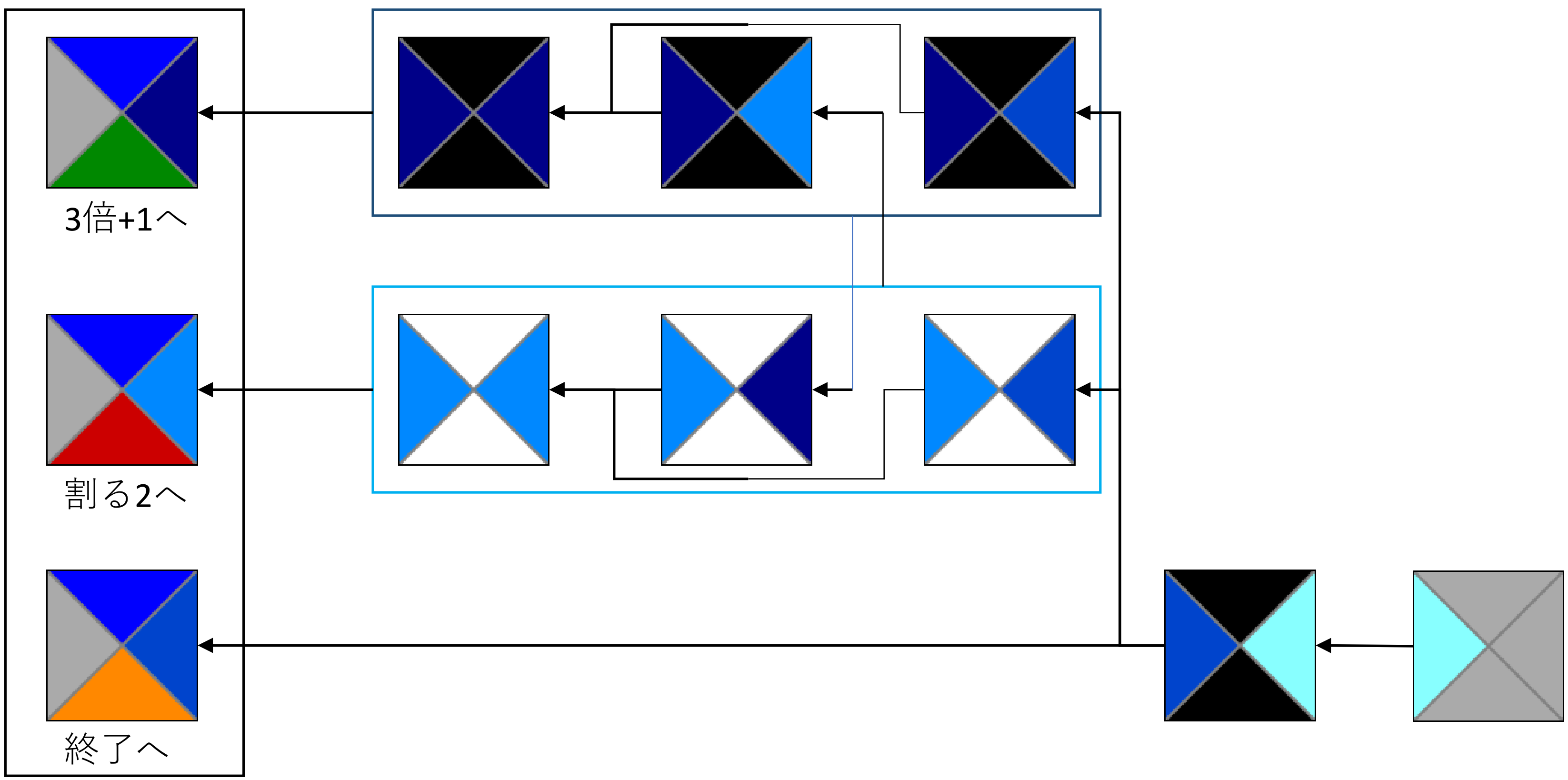
計算したい値を2進数→ベクトル形式にして0=白,1=黒として並べる

$89_{(10)} = 1011001_{(2)}$ → (1,0,0,1,1,0,1) → (黒,白,白,黒,黒,白,黒)

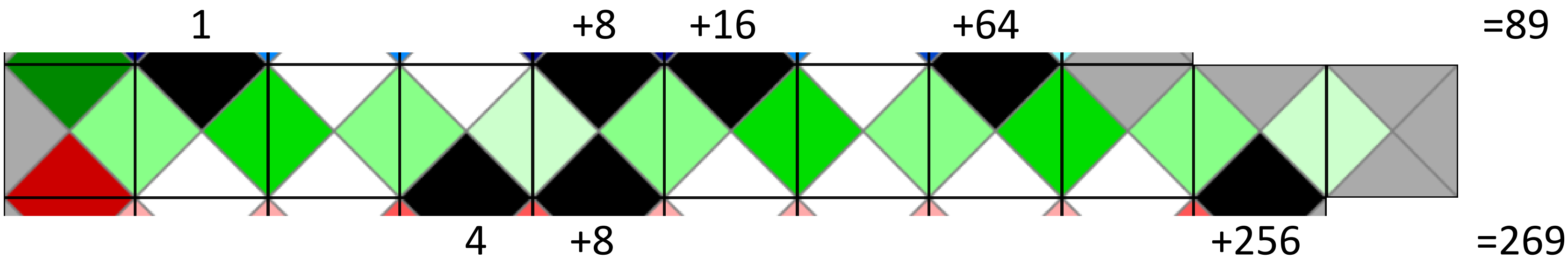
判定



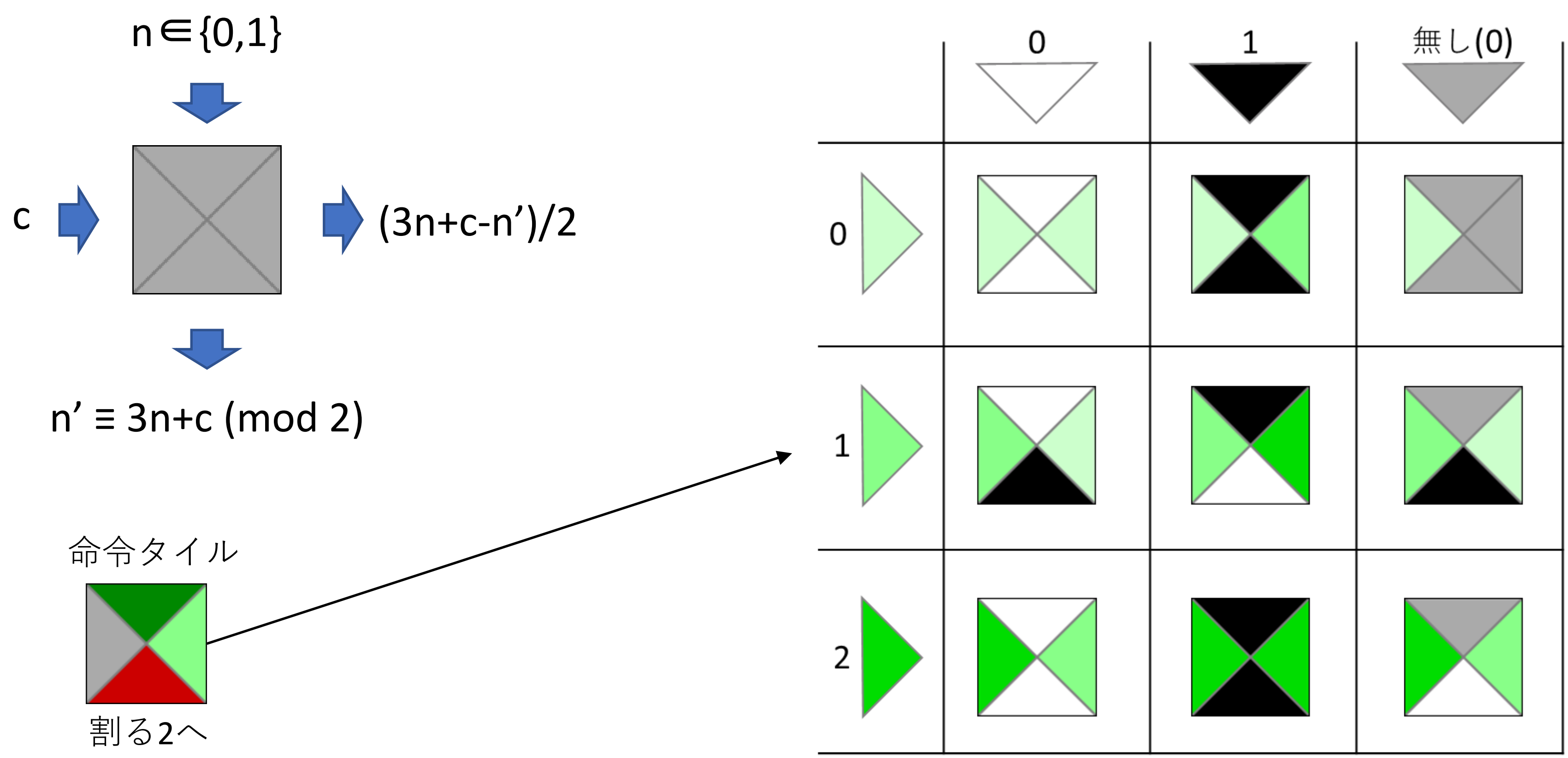
命令タイル



3倍+1

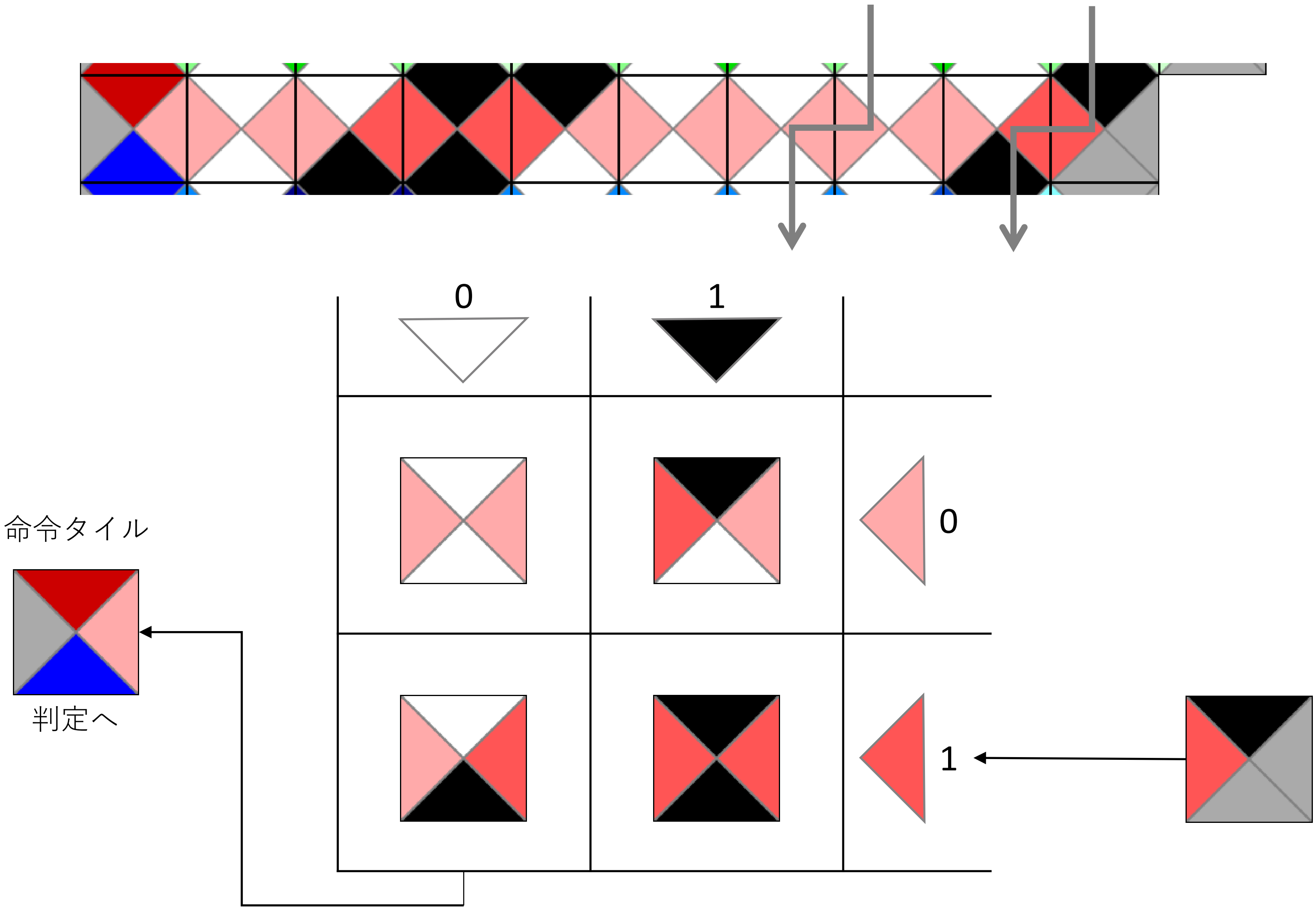


1
+8
+16
+64
=89
4
+8
+256
=269

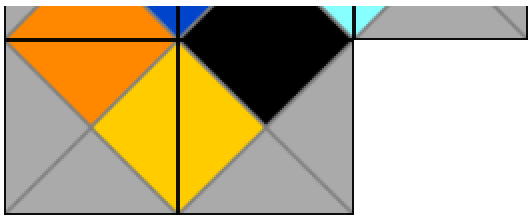


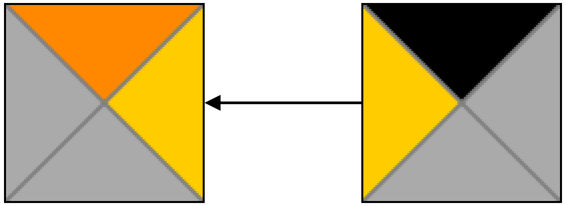
n∈{0,1}
c
(3n+c-n')/2
n' ≡ 3n+c (mod 2)
命令タイル
割る2へ
0
1
無し(0)
0
1
2

割る2

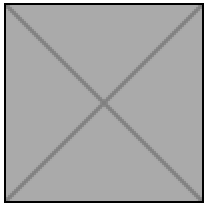


終了

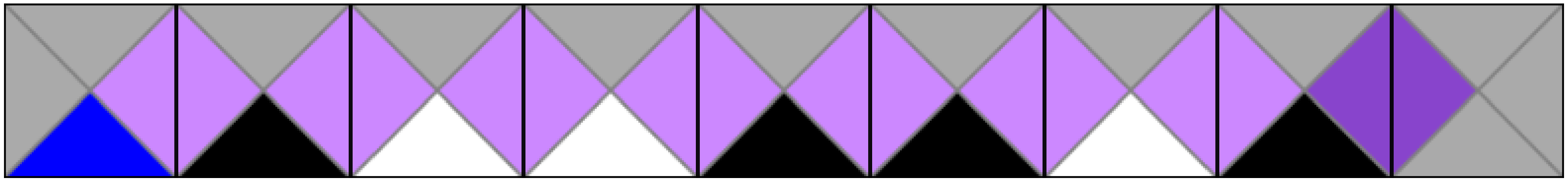




1になったときのみ終了



外側は全ての辺が灰色のタイルで埋まっている



初期値のタイルを並べたものを初期配置として、境界が全て灰色で囲まれるまでタイルを並べる

任意の自然数nについて

nに対してCollatz予想が成立している

⇔

Nから導かれる初期配置から外側が全て灰色で囲まれた有限の領域を作ることができる

初期値は3

3*3+1 = 10

10/2 = 5 = T(3)

3*5+1 = 16

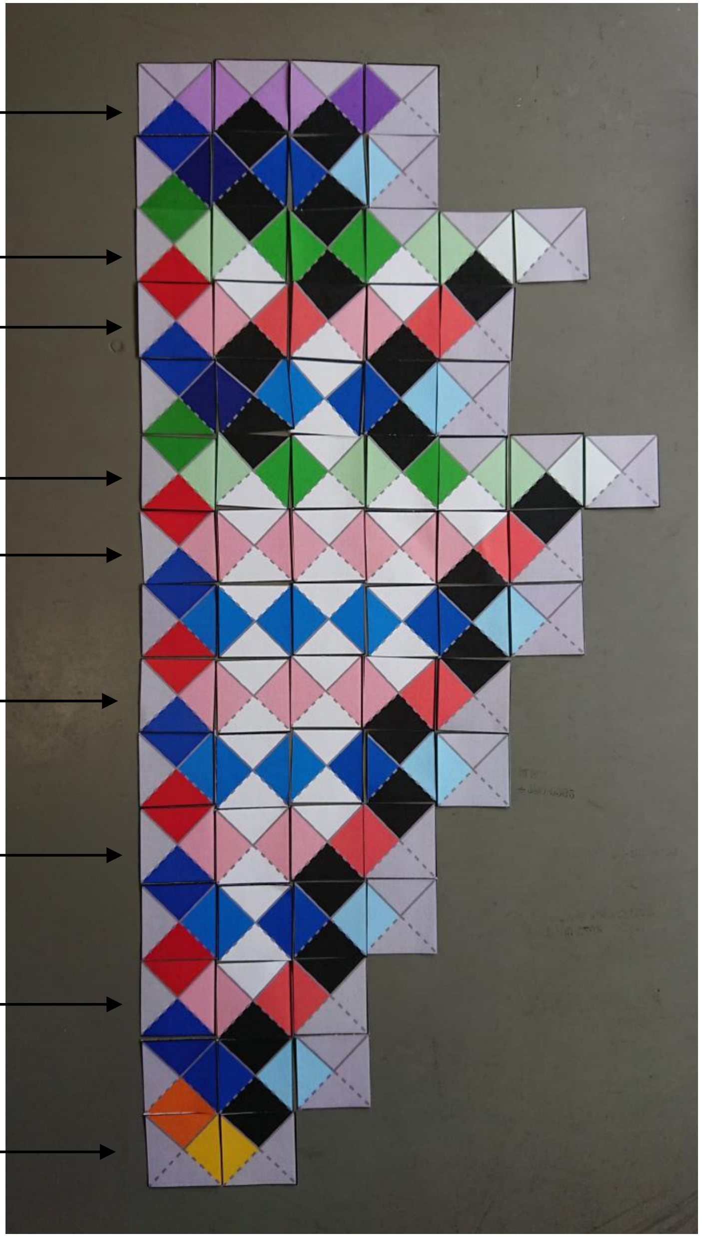
16/2 = 8 =T^2(3)

8/2 = 4 = T^3(3)

4/2 = 2 = T^4(3)

2/2 = 1 = T^5(3)

1になったので終了



$\sigma_\infty(n) = \min\{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} | T^k(n) = 1\}$ とすると行の数 $= 15 = 2(\sigma_\infty(3) + 1) + \mathrm{tr}(\mathrm{v}_{\sigma_\infty(3)+1}(3))$

参考文献

Robert Berger.(1966) The Undecidability of the Domino Problem. Number 66 in Memoirs of the American Mathematical Society. The American Mathematical Society.

Greg Egan.(1997) Diaspora. London:Millennium.

Emmanuel Jeandel, Michael Rao.(2015) An aperiodic set of 11 Wang tiles. arXiv:1506.06492.

Hao Wang.(1961) Proving theorems by Pattern Recognition II. Bell Systems technical journal, 40:1–41,