0に三角関数と逆三角関数を合成する

pn675*

2018/06/10

任意の 0 より大きい有理数 q に対して, ”0”に三角関数と逆三角関数を適当に有限回合成することで $\sqrt{q}$ を生成することができる．ここではその生成方法を解説する.

1 動機, 発想の背景

私が普段よくすることの一つに, 目についた数字を計算して遊ぶことが挙げられる.

例えば, 車のナンバーなどの 4 つの数字を使用してそれに四則演算を施して 10 を作る「make 10」[1]という遊びや, 使用する数字を 4 つの 4 に制限し演算を四則演算だけでなく $\sqrt{\ }$(平方根), ^ (べき乗) や！(階乗) なども許して自然数を作る「Four fours」[2]という遊びである。普段, 常に関数電卓を持ち歩いていることもあり, これらの遊びから更に使用できる数字を減らし使用できる演算 (関数) を許した場合の問題を考えるようになった.

私が持ち歩いている関数電卓[3]では, 四則演算, 平方根, べき乗, 階乗に加えて三角関数 (sin, cos, tan), 逆三角関数 (arcsin, arccos, arctan), (逆) 双曲線関数 (sinh, cosh, tanh, arcsinh, arccosh, arctanh), 対数関数 (log, ln) や組み合わせ ($_n\mathrm{C}_r$, $_n\mathrm{P}_r$) なども計算することができる. それらの使用も許す代わりに使用できる数字は 1 のみとし, 自然数を作る際にどれだけ使用する数を減らせるかを考えると, 例えば 1 が 4 つの場合は以下の例が挙げられる[4]:

$$n = \frac{\log\left(\frac{\log\sin(1)}{\log\sqrt{\cdots\sqrt{\sin(1)}}}\right)}{\log(1+1)}(\text{但し}\sqrt{\ }\text{は}\ n\ \text{重}).$$

使用する数字を 1 つだけにした場合, 必然的に使用できる演算子・関数は単項のもののみ[5]となる. そのなかで三角関数 (と逆三角関数) に注目して問題を考えることにした.

2 合成方法

表題通り, 0 に三角関数と逆三角関数を合成させることを考える．ここでは単純に考えて三角関数と逆三角関数を交互に作用させることにする．三角関数は一定周期で同じ値をとるため, 逆三角関数は値域を制限している[6]. そのため三角関数を作用させたあとに逆三角関数を作用させる合成は以下のような例になる:

$$\arcsin(\sin(\frac{1}{2}\pi)) = \arcsin(\sin(\frac{5}{2}\pi)) = \cdots = \arcsin(\sin((2n+\frac{1}{2})\pi)) = \cdots = \frac{1}{2}\pi\ (n \in \mathbb{Z}).$$

この合成方法では単射ではなく, また逆三角関数の値域の制限により限られた範囲の値しか生成できない. 目標は自然数全てを生成するような合成方法を見つけることであるため, 逆三角関数を作用させたあとに三角関数を作用させる合成を 1 つのユニットとして考える.

---

*pn675 の Web ページ (`http://pn675.html.xdomain.jp/`)

[1]「テンパズル」(wikipedia) を参照 `https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%83%86%E3%83%B3%E3%83%91%E3%82%BA%E3%83%AB`

[2]「4 つの 4」(wikipedia) を参照 `https://ja.wikipedia.org/wiki/4%E3%81%A4%E3%81%AE4`

[3] CASIO fx-373ES

[4] $0! = 1$ より 1 の所を 0! で置き換えることで使用する数字を 0 のみにすることもできる.

[5] つまり四則演算, べき乗などは使用できない.

[6] arcsin,arctan は $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,arccos は $[0,\pi]$

3　ユニットの構成

$A, B \in \{\sin, \cos, \tan\}$ としてユニットを $T_{A,B}(x) = A(arcB(x))$ $(0 \le x)$ と定義し, それを求めた結果は以下のようになる. またそれらの定義域は $B = \sin, \cos$ の場合は $0 \le x \le 1$, $B = \tan$ の場合は $0 \le x$ となる:

$A \diagdown B$	sin	cos	tan
sin	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
cos	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
tan	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x

表 . $T_{A,B}(x)$ の表

この中で $T_{\sin,\cos}$, $T_{\cos,\sin}$, $T_{\cos,\tan}$ の 3 つはいずれも,

$$T_{\sin,\cos}(0) = T_{\cos,\sin}(0) = T_{\cos,\tan}(0) = 1$$

となる. また $T_{\tan,\sin}(x) = \frac{1}{T_{\tan,\cos}(x)}$ となっているため,

$$\begin{aligned}
T_{\tan,\sin}(x) &= \frac{1}{T_{\tan,\cos}(x)} \\
T_{\tan,\sin}(T_{\cos,\tan}(x)) &= \frac{1}{T_{\tan,\cos}(T_{\cos,\tan}(x))} \\
T_{\tan,\sin} \circ T_{\cos,\tan}(x) &= \frac{1}{x} \\
\text{同様にして},\ T_{\tan,\cos} \circ T_{\sin,\tan}(x) &= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

と計算できる. 更に $T_{\sin,\tan}$ に注目する. $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$ とすると,

$$\begin{aligned}
T_{\sin,\tan}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\right) &= \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}}{\sqrt{1+\frac{n}{m}}} \\
&= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m+n}}.
\end{aligned}$$

となり, 分母, 分子を別々に比較することで $T_{\sin,\tan}$ を $(n, m) \longmapsto (n, m+n)$ という写像とみることができる.

4　ユークリッドの互除法の活用

$m, n \in \mathbb{N}$, $\gcd(m, n) = 1$, $n \le m$ として, ユークリッドの互除法を使用して $\{r_i\}$ を以下のように定める:

$$\begin{aligned}
r_0 &= m, \\
r_1 &= n, \\
r_{i+2} &= r_i \mod r_{i+1}\ (0 \le i).
\end{aligned}$$

このとき必ず有限回 (k_0 回) で $r_{k_0-1} = 1$, $r_{k_0} = 0$ となり, このとき $0 \le i \le k_0 - 2$ の範囲で $\{p_i\}$ を $p_i = \dfrac{r_i - r_{i+2}}{r_{i+1}}$ と定めると各 $\{r_i\}$, $\{p_i\}$ は $r_i = p_i \cdot r_{i+1} + r_{i+2}$ という関係式を満たす.

ここで $\{p_i\}$ を使用して逆に m, n を求めることを考える. 自然数の組 $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ について以下のように 2 つの写像 $f, g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ を定める:

$$\begin{aligned}
f : (a, b) &\longmapsto (a, b + a), \\
g : (a, b) &\longmapsto (b, a).
\end{aligned}$$

先述の関係式を使用して, これらの写像を $(r_{k_0-1},\ r_{k_0})$ に対して次のように合成すると m, n を求めることができる:

$$
\begin{tikzcd}
(1,0)=(r_{k_0-1},\ r_{k_0}) \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "f^{p_{k_0-2}}"] & (1,1)=(r_{k_0-1},\ r_{k_0}+r_{k_0-1}) \arrow[r, "f^{p_{k_0-2}-1}"'] & (r_{k_0-1},\ r_{k_0-2}) \arrow[dll, "g"'] \\
(r_{k_0-2},\ r_{k_0-1}) \arrow[rr, "f^{p_{k_0-3}}"] & & (r_{k_0-2},\ r_{k_0-3}) \\
& \vdots & \\
(r_2,\ r_3) \arrow[rr, "f^{p_1}"] & & (r_2,\ r_1) \arrow[dll, "g"'] \\
(r_1,\ r_2) \arrow[rr, "f^{p_0}"] & & (r_1,\ r_0) \quad =(n,m)
\end{tikzcd}
$$

図 . m,n を求める合成方法

つまり,

$$(f^{p_0}\circ g)\circ\cdots\circ(f^{p_{k_0-3}}\circ g)\circ f^{p_{k_0-2}}(1,0)=(n,m)$$

となる.

5 求める合成の構成

任意の $\sqrt{q}$ $(0<q\in\mathbb{Q})$ は $\sqrt{q}=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$ $(m,n\in\mathbb{N},\ \gcd(m,n)=1)$ と表すことができるため, f を $T_{\sin,\tan}$ と, g を $T_{\tan,\sin}\circ T_{\cos,\tan}$ と同一視することで, $\sqrt{q}\leq 1$ $(n\leq m)$ については以下のように構成することができる[7]:

$$\left(T_{\sin,\tan}^{p_0}\circ(T_{\tan,\sin}\circ T_{\cos,\tan})\right)\circ\cdots\circ\left(T_{\sin,\tan}^{p_{k_0-3}}\circ(T_{\tan,\sin}\circ T_{\cos,\tan})\right)\circ T_{\sin,\tan}^{p_{k_0-2}-1}\circ T_{\cos,\tan}(0)=\sqrt{q}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$$

$$(\text{但し},\ r_0=m,\ r_1=n,\ r_{i+2}=r_i \mod r_{i+1}\ (0\leq i\leq k_0-2),\ \ p_i=\tfrac{r_i-r_{i+2}}{r_{i+1}}\ (0\leq i\leq k_0-2)).$$

また $\sqrt{q}>1$ $(n>m)$ の場合は $\sqrt{q}=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}}$ として, $\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$ (<1) を計算し, 最後に反転させることで構成することができる:

$$(T_{\tan,\sin}\circ T_{\cos,\tan})\circ\left(T_{\sin,\tan}^{p_0}\circ(T_{\tan,\sin}\circ T_{\cos,\tan})\right)\circ\cdots\circ\left(T_{\sin,\tan}^{p_{k_0-3}}\circ(T_{\tan,\sin}\circ T_{\cos,\tan})\right)\circ T_{\sin,\tan}^{p_{k_0-2}-1}\circ T_{\cos,\tan}(0)=\sqrt{q}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}$$

$$(\text{但し},\ r_0=n,\ r_1=m,\ r_{i+2}=r_i \mod r_{i+1}\ (0\leq i\leq k_0-2),\ \ p_i=\tfrac{r_i-r_{i+2}}{r_{i+1}}\ (0\leq i\leq k_0-2)).$$

[7] $(1,0)$ は分数に直せないため $T_{\cos,\tan}(0)=1=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}}$ であることを使用すると, 前述の合成方法の初項は $(1,0)$ ではなく $(1,1)$ となる.

6 例

$\sqrt{q} = 6$ の場合

tan(arcsin(cos(arctan(sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(
sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(
sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(
sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(cos(arctan(0))))))))))))))))))))))))
)))

$\sqrt{q} = \frac{3}{7}$ の場合

sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(tan(arcsin(cos(arctan(sin(arctan(sin(arctan(tan(arcsin(
cos(arctan(sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(cos(arctan(0))))))))))))))))))))))))))))))

$\sqrt{q} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ の場合

tan(arcsin(cos(arctan(sin(arctan(tan(arcsin(cos(arctan(sin(arctan(sin(arctan(sin(arctan(cos(arctan(0)))))))))))
)))))))

その他の例は `http://pn675.html.xdomain.jp/self-work/comp_tri_0.html` にアクセスし, 構成したい値を入力することで Mathematica 用のコードが得られる.